INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 4
5.10.-9.10. 2009

Repetera vid behov induktionsbevis och rekursiva talföljder.

1. Bestäm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2-3)(3n^2-2)}{(n+1)(n^3+3)}$$

2. Definiera $x_n = \frac{1}{n}\sin^7 n^7$. Visa att $x_n \to 0$ då $n \to \infty$
   (a) direkt med hjälp av definitionen;
   (b) med hjälp av Instängningssatsen (Sats 4.11 i kompendiet).

I uppgiften får du använda all kunskap om sinusfunktionen från skolan.

3. Visa att

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{k^2+3k} - \sqrt{k^2}) = \frac{3}{2}.$$

4. Anta att talföjden (x_n) är avtagande och talföljden (y_n) är växande, samt att för varje n gäller att $y_n \leq x_n$. Visa att båda följderna konvergerar. (Tips: du kan visa att talföljden (x_n) är nedåt begränsad och talföljden (y_n) är uppåt begränsad.)

5. Visa att det reella talet $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ existerar och att $a^2 = 5$.

6. Modifiera exempel från föreläsningarna och visa att talföljden (x_n) har gränsvärdet $\sqrt{5}$, om $x_1 = 3$ och för varje n gäller att

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n}).$$

Extra frågor (behöver inte lösas för att kryssa för uppgiften): (a) Kan du förklara varför talföljden förefaller att konvergera mycket snabbt? (b) Kan du ge exempel på ett index n för vilket $|x_n - \sqrt{5}| < 10^{-100}$?

Obs. Det ges även extrapoäng för aktivt deltagande i handledningarna under 2. perioden. Noggrannare information senare.