INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 2
21.9.-25.9. 2009

I dessa uppgifter övar vi definitionen av absolutbeloppet och hur absolutbeloppet kan användas i uppskattningar.

1. (a) Vilka tal satisfierar olikheten $|2x - 5| < 1$? (b) Vilka tal satisfierar olikheten $0 < |2x - 5| < 1$? Det lönar sig att använda det faktum att en olikhet med absolutbelopp är likvärdig med ett par av olikheter, samt notera att $|t| > 0$ exakt då $t \neq 0$.

2. Anta att $|x - e| < 2^{-1000}$ och $|y - \pi| < 2^{-1000}$. Vilken slutsats kan du dra om avståndet $|(x + y) - (e + \pi)|$ mellan talens summor på basen av triangelolikheten?

3. Sök ett sådant tal $K > 0$ att för varje tal x från intervallet $]0, 2[$ gäller att

$$\left|\frac{x+3}{2x+5} - \frac{4}{7}\right| \leq K|x - 1|.$$

4. Anta att $|x - 5| < 4^{-99}$. Gäller då nödvändigtvis att $|x^2 - 25| < 4^{-97}$? I uppgiften lönar det sig att uppskatta uttrycket $|x^2 - 25|$ uppåt.

5. Sök ett sådant tal $h > 0$ att $|x^2 - 25| < 10^{-100}$ alltid gäller om $|x - 5| < h$. (Här betyder ”alltid gäller om” det samma som ”för varje sådant x för vilken gäller ...”). I uppgiften lönar det sig att använda uppskattningen från föregående uppgift för $|x^2 - 25|$.

6. Sök att sådant tal $h > 0$ att $|\sqrt{x} - 1| < 10^{-1000}$ alltid gäller om $|x - 1| < h$. I uppgiften lönar det sig att uppskatta uttrycket $|\sqrt{x} - 1|$ uppåt genom att ”hyfsa bort” kvadratroten.