INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 11
7.12.-11.12. 2009

På föreläsningarna går vi i detta skede genom basegenskaperna hos de viktiga transcendenta funktionerna i kompendiet. Dessa uppgifter är de sista hemövningarna denna höst.

1. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för varje $x > 0$ gäller
   (a) $\sinh x - \sin x > 0$;
   (b) $\cos x - (2 - \cosh x) > 0$.

2. Härled ekvationen

$$D\text{ar}\cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

då $x > 1$. Se sidorna 84 och 85 i kompendiet!

3. Visa att $x^x = e^{x \ln x}$ är strängt växande i intervallet $[\frac{1}{e}, \infty[$.

4. Vi betraktar funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x + \sin x$. Utred vilka lokala extremvärden funktionen har.

5. Definiera $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$ då $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. Är f deriverbar i punkten $x = 0$? Vad händer i punkterna $x \neq 0$? Är derivatafunktionen f' kontinuerlig? Är f' begränsad?

6. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för varje $x \in [0; 0,99]$ gäller

$$\frac{1}{12}x^4 \leq \cos x - (2 - \cosh x) \leq \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{720}x^6$$

Tips: tillämpa idén från övning 10:1 (behöver inte separat motiveras). I uppgiften får man använda att $-\cos x_0 + \cosh x_0 < 1$ då $x_0 = 0,99$. Undersök hjälpfunktionen $f(x) = (\cos x - (2 - \cosh x)) - \frac{1}{12}x^4$. Visa först att den sjätte derivatan satisfierar $0 \leq f^{(6)}(x) \leq 1$ då $x \in (0; 0,99)$ (exempelvis att den sjätte derivatan är strängt växande i intervallet). Framskrid steg för steg som i uppgift 10:1 till lägre derivator för att till sist nå information om hjälpfunktionen f. [Alternativ: derivera lämpliga hjälpfunktioner tillräckligt många gånger samt använd uppgift 11:1.]