INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Övning 10
30.11.-4.12. 2009

I dessa övningsuppgifter får man använda kända egenskaper av kända funktioner från skolkursen som exempelvis kontinuiteten och deriveringsregler för kosinusfunktionen. Medelvärdessatsen är användbar i flera uppgifter.
En del av uppgifterna kan påminna om skoluppgifter: kom dock ihåg att motivera dina lösningar med hjälp av satser från kursen Analys I.

1. Anta att funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta att $f(0) = 7$ samt att för varje $x \in (0,1)$ gäller att $x < f'(x) < 1$. Vad vet man på basen av detta om värdet $f(1)$? Tips: man har nytta av hjälpfunktionen $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$; det lönar sig att visa att för varje $x \in (0,1)$ gäller $g'(x) > 0$.

2. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla x gäller att

$$|\cos x - 1| \leq |x|.$$

(Kom ihåg att $\cos 0 = 1$.)

3. Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilka x antar den sk. kvadratiska summan $(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$ sitt minsta möjliga värde?

4. Anta att $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $[0,1]$ och deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta dessutom att $\lim_{x\to 0+} f'(x) = \infty$. Visa med hjälp av medelvärdessatsen att funktionen f inte är deriverbar från höger i punkten $x = 0$. (Högerderivatan är högergränsvärdet av differenskvoten ifall detta gränsvärde existerar.)

5. Vi undersöker funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, där

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4 + 1}}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Visa med hjälp av resultatet i förgående uppgift att f inte är deriverbar i punkten $x = 0$. Undersök om funktionen f antar ett största eller minsta värde i $\mathbb{R}$, samt sök lokala extremvärden. (För att förenkla beräkningarna lönar det sig att först undersöka uttrycket innanför kubikroten.)

6. Anta att $h > 0$ och att funktionen $f : (x_0 - h, x_0 + h) \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig i intervallet $(x_0 - h, x_0 + h)$ och deriverbar i intervallen $(x_0 - h, x_0)$ och $(x_0, x_0 + h)$. Anta dessutom att $\lim_{x\to x_0-} f'(x) = \lim_{x\to x_0+} f'(x) = A \in \mathbb{R}$. Visa att f är deriverbar i punkten x_0 och att $f'(x_0) = A$. Tips: tillämpa medelvärdessatsen på differenskvoten.