09/Analyysi I/Ohjaus 1. kk. varten (19.–21.10.2009) Ratkaissut OK

Ilmaisemme alla kurssimonisteen sivun, jolla viittaamamme lause tms. sijaitsee, etsimisen helpottamiseksi toisinaan laittamalla ko. sivunumeron yläindeksiksi.

1. **Pohdinta:** *Lauseke, jonka raja-arvoa kysytään, on kahden n:n polynomin osamäärä. Osoittaja ja nimittäjä näyttäisivät kasvavan rajatta*[1]*, mutta sillä perusteella ei osamäärästä voisi päätellä juuri mitään: sillä voisi olla reaalinen raja-arvo, sivun 19 määritelmän mielessä, tai se voisi kasvaa rajatta, sivun 30 määritelmän mielessä, mutta voisi olla myös, ettei kumpikaan toteudu (raja-arvoa ei missään mielessä olisi)! (Kaikista näistä tapauksista on helppo näyttää esimerkit.) Siispä hylkäämme alkuperäisen osoittajan ja nimittäjän.*

   Mutta tämäntapaista olemme tutkineet aiemminkin... Oleellista on, että osoittajassa ja nimittäjässä polynomin asteluku on sama, 4. Supistamalla lausekkeella n^4 — toisaalta muodossa $n \cdot n^3$, toisaalta muodossa $n^3 \cdot n$ — päästään tilanteeseen, jossa uudella osoittajalla ja nimittäjällä on reaalinen raja-arvo, sivun 19 käsitteen mukaan, jolloin päästään kokeilemaan lauseen 4.7^{23} kohtaa 4.

   Ratkaisu: Ei kuljeteta lim-merkkejä painolastina ja ennenaikaisesti *(emme lähtökohtaisesti edes tiedä, onko raja-arvo olemassa!)* vaan keskitytään asian ytimeen, osamäärälausekkeen muokkaukseen ja tutkimiseen:

   $$n \in \mathbb{N}: \qquad \frac{(n+1)(n^3+2009)}{(n^3+1)(3n+2009)} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2009}{n^3})}{(1+\frac{1}{n^3})(3+\frac{2009}{n})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

   $$\frac{(1+0)(1+2009\cdot 0^3)}{(1+0^3)(3+2009\cdot 0)} = \frac{1\cdot 1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$$

   lauseen 4.7^{23} eri kohtien nojalla (esim. lauseen kohtaa 1 käytämme neljästi). Koska lause 4.7 on "pelkkää jossittelua", tarvitsimme (tehtävässä sallittuja) lähtötietoja suppenevista jonoista:

   $$1 \to 1\,, \quad 3 \to 3\,, \quad 2009 \to 2009\,, \quad \tfrac{1}{n} \to 0\,,$$

   kun $n \to \infty$. Huomaa vielä, että yllä piti tarkistaa, että nimittäjän raja-arvo (eli $(1+0^3)(3+2009\cdot 0) = 3$) on 0:sta poikkeava (4.7:n kohdan 4 oletus).[2]
   <u>Vastaus: $1/3$.</u>

2. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. (Kun halutaan perustella raja-arvon olemassaolo määritelmää käyttäen, on selkeää lähteä tästä.)

   $$n \in \mathbb{N}: \quad \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{|1|}{|n^2|} = \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}\,.$$

---

[1] Tämän osoittamiseen ei muuten ainakaan monisteessa olisi valmista lausetta. Esimerkiksi lausetta 4.7^{23} ei tietenkään voitaisi käyttää, sillä se ei lainkaan koske rajatta kasvamisen käsitettä.

[2] Sen sijaan nimittäjä*jonon jäsenistä* vastaava oletus ei ole oleellinen, sillä niistä vain äärellisen moni voisi olla 0, kun raja-arvo kerran on olemassa ja 0:sta poikkeava; äärellisen monta jäsentä voidaan jonosta aina poistaa tai muuttaa ilman vaikutusta suppenemiseen (suppenee/ei suppene) eikä (suppenemistapauksessa) edes raja-arvoon! Toki tässä $(1+\frac{1}{n^3})(3+\frac{2009}{n}) \neq 0$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Nähdään helposti, että $1/n < \varepsilon$, kun $n > 1/\varepsilon$.

Valitaan luonnollinen luku n_ε tai k niin, että se on vähintään reaaliluvun $1/\varepsilon$ suuruinen.[3] Jos nyt $n > k$, on $n > k \geq 1/\varepsilon$ luvun k valinnan nojalla, jolloin $n > 1/\varepsilon$ ja yo:n nojalla $|\frac{n^2+1}{n^2} - 1| \leq 1/n < \varepsilon$. On siis löydetty $k \in \mathbb{N}$, jolle pätee:

$$\text{Jos} \quad n > k, \quad \text{on} \quad \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Näin ollen, ja koska alun positiiviluku ε oli mielivaltainen, määritelmän[19] ehto täyttyy sille, että on olemassa $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$. □

3. **Pohdinta ja ratkaisu:** Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska $|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}|$ on saatava "pieneksi" tekemällä $|x-1|$ "pieneksi", muokkaamme lauseketta niin, että $|x-1|$ tulee esiin sopivasti; kokeilemme tuttua "neliöjuuritemppua" eli (kuvittelemme nimittäjän 1 ja) lavennamme summalla $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}$:

$$x \neq 1\colon \quad |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}| \;=\; \left|\frac{x^2+1-2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\right| \;=\; \frac{|x+1|\cdot|x-1|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}\,.$$

(Tässä on tehty s. 32 määritelmän mukainen rajoitus $x \neq 1$, vaikkei sillä tässä tapauksessa olekaan vaikutusta.) Nyt halutaan nähdä, saadaanko lauseke pienemmäksi kuin alun ε tekemällä $|x-1|$ kyllin pieneksi. Tässä auttaisi suuresti, jos voisimme löytää lausekkeelle ns. *majorantin* muotoa

$$\text{vakio} \cdot |x-1|\,.$$

No, nimittäjä on mutkikas, mutta aina suurempi kuin ... sanokaamme 1. Osoittajassa $|x+1|$ on "noin" 2, kun x on "noin" 1, joten $|x+1|$ ei tuota ongelmaa. Teknisesti: Valitaan sanan 'noin' merkitykseksi tässä vaikkapa 'alle 1:n päässä': Jos $|x-1| < 1$, on Itseisarvolemman nojalla

$$-1 < x - 1 < 1\,,$$

jolloin (lisäämällä puolittain 2) saadaan, että $1 < x+1 < 3$ ja siis $|x+1| < 3$ (itseisarvon määritelmän[6] nojalla). Nyt saadaan ylöspäiset arviot

$$\frac{|x+1|\cdot|x-1|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} \overset{(1)}{\leq} \frac{|x+1|\cdot|x-1|}{1} = |x+1|\cdot|x-1| \overset{(2)}{\leq} 3\cdot|x-1|$$

Kohta (1) perustuu kaikille $x \in \mathbb{R}$ totta olevaan kahteen asiaan: osoittaja on epänegatiivinen ja nimittäjä $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2} > 1$. Kohta (2) sen sijaan on äsken pohditun mukaan totta, kun $|x-1| < 1$. Silloin näet $|x+1| < 3$ ja kertoja $|x-1|$ epänegatiivinen.

Näin löysimme — tosin rajoituksen $|x-1| < 1$ hinnalla — toivotunlaisen majorantin:

$$|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}| \;\leq\; \text{vakio} \cdot |x-1|\,,$$

missä vakioksi käy ainakin luku 3.

[3] Ns. Arkhimedeen lauseen nojalla tällaisia luonnollisia lukuja on olemassa — mutta siitä ei tällä kurssilla tarvinne välittää.

Nyt näemme, että yksi sopiva valinta on $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$. Silloin näet ensinnä $\delta > 0$ (koska $1 > 0$ ja $\varepsilon/3 > 0$). Lisäksi pätee *jossittelu:*

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad x \neq 1\,, \quad |x-1| \overset{*}{<} 1\,, \quad |x-1| < \varepsilon/3$$

$$\Rightarrow \quad |\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}| \overset{**}{\leq} 3 \cdot |x-1| \; < \; 3 \cdot \varepsilon/3 \; = \; \varepsilon\,.$$

Kohdassa $**$ käytetään hyväksi eo. majoranttitarkasteluja ja epäyhtälöä $*$. Koska mielivaltaiselle $\varepsilon > 0$ on löydetty $\delta > 0$ (nimittäin $\delta = \min\{1, \varepsilon/3\}$), jolle yo. jossittelu pätee, on määritelmän[32] mukaan tullut osoitetuksi, että on olemassa $\lim_{x \to 1} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$. □

4. **Pohdinta:** *Muistamme tärkeän tuloksen, että nouseva lukujono suppenee* jos ja vain jos *se on ylhäältä rajoitettu. Sen mukaan tehtävän väite on yhtäpitävä (samanarvoinen) sen kanssa, että jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu.*

   Viimeksi mainittuun ei toki riitä tieto, että termiä x_n rajoittaa luku y_n, vaan on löydettävä yksi luku (vakio), joka yhtaikaa rajoittaa kaikkia *termejä x_n. Ja siinä taas on jonon (y_n) suppeneminen oleellista (muutenhan voisi olla esim. $x_n = y_n = n$, jolloin (x_n) ei suppenisi). Miten hyödyntäisimme sitä?*

   Ratkaisu: Lauseen 4.4[22] nojalla jono (y_n) on suppenevana rajoitettu, siis erityisesti ylhäältä rajoitettu, jolloin on olemassa sellainen M, että

$$y_n < M \qquad \text{kaikille } n \in \mathbb{N}.$$

   Mutta tällöin on $x_n \leq y_n < M$ kaikille $n \in \mathbb{N}$, joten myös jono (x_n) on ylhäältä rajoitettu. Näin ollen lauseen 4.8[25] nojalla jono (x_n) suppenee. □