MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 5
Mallit (Ansku)

1. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n+3} = \infty.$$

Ratkaisu. Osoitetaan väite todeksi suoraan määritelmän avulla. Lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos kaikilla (kuinka tahansa suurilla) luvuilla $M \in \mathbb{R}$ on olemassa luku n_M, jolle $x_n > M$ aina, kun $n > n_M$. Arvioidaan lukujonon jäseniä x_n alaspäin.

$$x_n = \frac{n^2+3}{n+3} = \frac{n^2(1+\frac{3}{n^2})}{n(1+\frac{3}{n})} \overset{\star}{\geq} \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

Arvio $\star$ pätee, koska $1 + \frac{3}{n^2} \geq 1$ ja $1 + \frac{3}{n} \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $M > 0$. Nyt $\frac{n}{2} > M$, kun $n > 2M$. Valitaan $n_M > 2M$. Kun $n > n_M$, niin $n > 2M$. Siis

$$x_n \geq \frac{n}{2} > \frac{2M}{2} = M,$$

eli väite pätee.

2. Selvitä luvun e määritelmän avulla

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2n})^n.$$

Ratkaisu. Luvun e määritelmä on

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Kirjoitetaan tehtävän lauseke muodossa

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} = \left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} .$$

Koska $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, niin myös $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n} = e$. Tämän voi perustella esimerkiksi sillä, että suppenevan jonon jokainen osajono suppenee kohti samaa lukua.

Tiedetään, että kun $x_n \geq 0$ ja $x_n \to a$, niin $\sqrt{x_n} \to \sqrt{a}$. Siis

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} = \sqrt{e}.$$

3. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Tulkitse tulos tietona jatkuvuudesta.

Ratkaisu. Halutaan, että $|x^2-4| < \varepsilon$ aina, kun $0 < |x-2| < \delta$. Arvioidaan ensin erotuksen itseisarvoa:

$$\begin{aligned} |x^2-4| &= |(x-2)(x+2)| \\ &= |x-2||x+2| \\ &= |x-2||(x-2)+4| \\ &\overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} |x-2|\left(|x-2|+4\right). \end{aligned}$$

Kun $|x-2| < \delta$, niin

$$|x^2-4| \leq |x-2|\left(|x-2|+4\right) < \delta(\delta+4) = \delta^2 + 4\delta \overset{\star}{<} 5\delta.$$

$\star$ Tarvitaan vielä lisäoletus $\delta < 1$, jotta $\delta^2 < \delta$, ja saadaan haluttu arvio. Nyt $5\delta < \varepsilon$, kun $\delta < \frac{1}{5}\varepsilon$.

Valitaan esimerkiksi $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\varepsilon\}$. Siis kun $0 < |x-2| < \delta$, niin

$$|x^2-4| < 5\delta < 5 \cdot \frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon,$$

eli väite pätee.

Koska funktion $f(x) = x^2$ arvo ja raja-arvo kohdassa $x = 2$ ovat samat, niin f on jatkuva kohdassa $x = 2$.

4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän avulla, että

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} = \frac{1}{4}.$$

Tulkitse tulos tietona derivaatasta.

Ratkaisu.

$$\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{(\sqrt{x}-\sqrt{4})(\sqrt{x}+\sqrt{4})} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{4}} - \frac{1}{4}\right|$$

$$= \left|\frac{4-(\sqrt{x}+2)}{4(\sqrt{x}+2)}\right| = \left|\frac{2-\sqrt{x}}{4(\sqrt{x}+2)}\right| = \frac{1}{4}\left|\frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right|$$

$$= \frac{1}{4}\frac{|4-x|}{|(2+\sqrt{x})^2|} = \frac{|x-4|}{4(2+\sqrt{x})^2} = \frac{1}{4(2+\sqrt{x})^2} \cdot |x-4|$$

Tämä lauseke halutaan pieneksi, kun $0 < |x-4| < \delta$. Voidaan olettaa, että $0 < \delta < 1$. Tästä saadaan

$$\begin{aligned} 1 < |x-4| < \delta < 1 \\ -1 < x-4 < 1 \\ 3 < x < 5 \end{aligned}$$

Koska $x > 3$, niin $x > 0$ ja myös $\sqrt{x} > 0$. Arvioidaan:

$$\frac{1}{4(2+\sqrt{x})^2} \cdot |x-4| < \frac{1}{(2+\sqrt{x})^2} \cdot |x-4| < \frac{1}{2^2} \cdot |x-4| = \frac{1}{4} \cdot |x-4| < \frac{1}{4}\delta.$$

Saadaan $\frac{1}{4}\delta < \varepsilon$, kun $\delta < 4\varepsilon$. Valitaan esimerkiksi $\delta = \min\{1, 4\varepsilon\}$. Nyt

$$\left| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4(2+\sqrt{x})^2} \cdot |x-4| < \frac{1}{4} \cdot |x-4| < \frac{1}{4}\delta < \frac{1}{4} \cdot 4\varepsilon = \varepsilon,$$

eli väite pätee.

On osoitettu, että funktion $f(x) = \sqrt{x}$ erotusosamäärän raja-arvo kohdassa $x = 4$ on $\frac{1}{4}$ eli funktio f on derivoituva kohdassa $x = 4$, ja derivaatan arvo on $\frac{1}{4}$.

5. (a) Osoita, että

$$\frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p}.$$

(b) Osoita, että

$$\frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1}.$$

(c) Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

Vihje: (a) ja (b) kohdista saattaa olla apua, jos aluksi tarkastelet erikseen parillisia ja parittomia n.

Ratkaisu. Käytetään Bernoullin epäyhtälöä

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \text{kun } x > -1 \text{ ja } n \in \mathbb{N}.$$

Tässä siis $p \in \mathbb{N}$. Huomataan, että $2^{2p} = (2^p)^2 = \left((1+1)^p\right)^2$. Nyt Bernoullin epäyhtälöstä saadaan (kun $x = 1$ ja $n = p$)

$$\begin{aligned}
(1+1)^p &\geq 1 + p \cdot 1 \\
2^p &\geq 1 + p \\
(2^p)^2 &\geq (1+p)^2 \qquad \star \\
\frac{2^{2p}}{2p} &\geq \frac{(1+p)^2}{2p}.
\end{aligned}$$

$\star$ Koska epäyhtälön molemmat puolet ovat positiivisia, ne voidaan korottaa toiseen potenssiin. Seuraavalla rivillä jaetaan puolittain positiivisella luvulla $2p$.

b) Kirjoitetaan nyt $2^{2p+1} = 2 \cdot 2^{2p}$ ja aloitetaan a)-kohdan riviltä $\star$.

$$\begin{aligned}
2^{2p} &\geq (1+p)^2 \\
2 \cdot 2^{2p} &\geq 2 \cdot (1+p)^2 \\
2^{2p+1} &\geq 2 \cdot (1+p)^2 \\
\frac{2^{2p+1}}{2p+1} &\geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1}
\end{aligned}$$

c) Osoitetaan, että $\frac{2^n}{n} > M$ kaikilla $M \in \mathbb{R}$, kunhan n on tarpeeksi suuri. Käytetään vihjettä ja tarkastellaan erikseen parillisia ja parittomia lukuja n. (Tehtävän voisi ratkaista myös induktiolla, mutta tehdään se näin.)

1° Kun n on parillinen, niin $n = 2p$ jollakin $p \in \mathbb{N}$. Tällöin $p = \frac{n}{2}$. Nyt a)-kohdan avulla

$$\frac{2^n}{n} = \frac{2^{2p}}{2p} \geq \frac{(1+p)^2}{2p} = \frac{1+2p+p^2}{2p} \geq \frac{2p+p^2}{2p} = \frac{2+p}{2} \geq \frac{p}{2} = \frac{\frac{n}{2}}{2} = \frac{n}{4}.$$

Nyt $\frac{n}{4} > M$, kunhan $n > 4M$. Voidaan valita $n_{M1} = 4M$.

2° Kun n on pariton, niin $n = 2p+1$ jollakin $p \in \mathbb{N}$. Tällöin $p = \frac{n-1}{2}$. Nyt b)-kohdasta saadaan

$$\begin{aligned}\frac{2^n}{n} &= \frac{2^{2p+1}}{2p+1} \geq 2\frac{(1+p)^2}{2p+1} = \frac{2(1+2p+p^2)}{2p+1} = \frac{2+4p+2p^2}{2p+1} \\ &\geq \frac{4p+2p^2}{2p+p} = \frac{4+2p}{3} \geq \frac{2p}{3} \geq \frac{p}{3} = \frac{\frac{n-1}{2}}{3} = \frac{n-1}{6}.\end{aligned}$$

Nyt $\frac{n-1}{6} > M$, kunhan $n-1 > 6M$ eli $n > 6M+1$. Voidaan valita $n_{M2} = 6M+1$.
Yhdistetään kohtien 1° ja 2° tulokset. Jos M on annettu, niin valitsemalla $n_M = \max\{n_{M1}, n_{M2}\}$ saadaan $\frac{2^n}{n} > M$ sekä parillisilla ettää parittomilla n, eli väite pätee.

6. Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a \in \mathbb{R}$, kun $n \to \infty$, missä $a > 0$. Osoita, että $x_n y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$. Vihje: $y_n > \frac{a}{2}$ kun n on kyllin suuri. Lisäkysymys: entä jos $a = 0$?

Ratkaisu. Koska $x_n \to \infty$, kun $n \to \infty$, niin jokaisella (kuinka suurella tahansa) $M \in \mathbb{R}$ on olemassa jokin indeksi n_M, jolle pätee $x_n > M$, kun $n > n_M$. Käytetään lisäksi vihjettä (joka on perusteltu kurssilla) eli tietoa, että $y_n > \frac{a}{2}$, kun n on tarpeeksi suuri. Siis on olemassa jokin $n_{\frac{a}{2}}$, jolle $y_n > \frac{a}{2}$ aina, kun $n > n_{\frac{a}{2}}$. Koska $a > 0$, niin myös $\frac{a}{2} > 0$.
Arvioidaan nyt tuloa. Kun n on tarpeeksi suuri, niin pätee $x_n > M$ ja $y_n > \frac{a}{2}$. Tällöin

$$x_n y_n > M \cdot \frac{a}{2}.$$

Nyt voidaan merkitä $M \cdot \frac{a}{2} = N \in \mathbb{R}$. Siis kun valitaan $n > \max n_M, n_{\frac{a}{2}}$, niin $x_n y_n > N$, joten $x_n y_n \to \infty$, kun $n \to \infty$. (Lähtemällä tiedosta $x_n > \frac{2M}{a}$ tarpeeksi suurilla n saataisiin kauniisti tulos $x_n y_n > M$ tarpeeksi suurilla n.)

Jos $a = 0$, niin jonosta $(x_n y_n)$ ei voida päätellä mitään. Sillä voi olla raja-arvo $a \in \mathbb{R}$, esimerkiksi, jos $x_n = n$ ja $y_n = \frac{a}{n}$. Nyt $x_n y_n = n \cdot \frac{a}{n} = a$ kaikilla n.

Jono voi kasvaa rajatta, esimerkiksi, kun $x_n = n^2$ ja $y_n = \frac{1}{n}$. Nyt $x_n y_n = n$.

Voi myös olla niin, ettei jonolla ole raja-arvoa eikä se kasva tai vähene rajatta. Esimerkiksi, kun $x_n = n$ ja $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Nyt $x_n y_n = (-1)^n n$.