MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi 1
Ohjaukset 3 malliratkaisut, Aapo Tevanlinna

Luennoilla on käynnissä lukujonon raja-arvoon tutustuminen esimerkkien ja lauseiden kautta. Tavoitteena on näissä ohjauksissa "ihan ite"tulla tutuksi $(\epsilon, n_\varepsilon)$-ajattelun kanssa. Jos huomaat, että koko alkusyksyn lasketut epäyhtälö- ja itseisarvotehtävät oikeasti olivat jo raja-arvoasiaa, niin aina vaan parempi.

1. Osoita väite $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$ todeksi.

Ratkaisu.
Olkoon $\varepsilon > 0$ ja merkitään $x_n = \frac{n+3}{n+1}$. Lukujonon raja-arvon määritelmän mukaan kullekin ε:lle täytyy löytyä raja-indeksi n_ϵ, siten että $|x_n - 1| < \varepsilon$ kaikilla jonon jäsenillä x_n, joilla indeksi n on suurempi kuin n_ε. Todetaan tämän raja-indeksin löytyminen mahdolliseksi:

$$\begin{aligned}|x_n - 1| &= \Big|\frac{n+3}{n+1} - 1\Big| = \Big|\frac{n+3}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\Big| = \Big|\frac{2}{n+1}\Big| \\ &= \frac{2}{n+1} \le \frac{2}{n} < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun $n > 2/\varepsilon$. Tästä huomaammekin, että haetuksi raja-indeksiksi n_ε kelpaa mikä tahansa luonnollinen luku, joka on isompi kuin $2/\varepsilon$.

Jotta asia näkyisi hieman selvemmin, niin tässä vielä asia "toiseen suuntaan"tarkasteltuna. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja olkoon $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sellainen, että $n_\varepsilon > 2/\varepsilon$. Jos nyt $n > n_\varepsilon$, on

$$\begin{aligned}|x_n - 1| &= \Big|\frac{n+3}{n+1} - 1\Big| = \Big|\frac{n+3}{n+1} - \frac{n+1}{n+1}\Big| = \Big|\frac{2}{n+1}\Big| \\ &= \frac{2}{n+1} \le \frac{2}{n} < \frac{2}{2/\varepsilon} = \varepsilon,\end{aligned}$$

mikä olikin haluttu tulos.

2. Osoita väite $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 2$ epätodeksi.

Ratkaisu.
Tämän tehtävän voi ratkaista eri tyylein. Koska kyseessä on sama lukujono kuin tehtävässä 1, ja osoitimme juuri että kyseinen jono suppenee kohti lukua 1, kun $n \to \infty$, voisimme vedota raja-arvon yksikäsitteisyyteen. Jos

siis olisi $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 2$, niin silloin myös $1 = 2$, joka on selkeä ristiriita. Ratkaistaan kuitenkin tehtävä suoraan käyttäen lukujonon raja-arvon määritelmää.

Määritelmän mukaan $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} = 2$, jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy raja-indeksi n_ε, että $|x_n - 2| < \varepsilon$ aina kun $n > n_\varepsilon$. Riittää siis löytää ainakin yksi sellainen $\varepsilon > 0$, jolle ei kyseistä raja-indeksiä n_ε löydy. Väitetäänkin siis, että kun $\varepsilon = 1/4$ niin ei löydy raja-indeksiä $n_{1/4}$. Tehdään kuitenkin ensin oletus $n \geq 2$, sillä jos indeksi 1 kelpaisi raja-indeksiksi, niin silloin myös indeksi 2 kelpaisi. Nyt siis

$$\begin{aligned}|x_n - 2| &= \left|\frac{n+3}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{n+3}{n+1} - \frac{2(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-n+1}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{-(n-1)}{n+1}\right| = \left|\frac{n-1}{n+1}\right| = \frac{n-1}{n+1} > \frac{n-1}{2n} = \frac{n}{2n} - \frac{1}{2n} \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Tästä voimmekin päätellä, että raja-indeksiksi $n_{1/4}$ ei kelpaa mikään luonnollinen luku, jolle $n_{1/4} \geq 2$. Tämän seurauksena $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{n+1} \neq 2$

3. Onko olemassa

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})?$$

Ratkaisu.

Tehtävän tarkoitus on itse etsiä ehdokas raja-arvolle ja sen jälkeen osoittaa, että ehdokas todella on raja-arvo lukujonolle. Mikäli puolestaan uskoo, että jono hajaantuu, niin sitten erinäisiä keinoja käyttäen osoittaa, että se todella hajaantuu. Huomataan kuitenkin, että

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Tämä antaa hyvät perusteet väittää, että $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$. Todistetaan väite. Etenemistyyli samanlainen kuin tehtävässä 1.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned}
|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-0| &= \Big|\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Big| \\
&= \Big|\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $n > 1/\varepsilon^2$. Raja-indeksiksi siis kelpaa mikä tahansa luonnollinen luku, joka on isompi kuin $1/\varepsilon^2$.

4. Jonosta (x_n) tiedetään vain, että $|x_n| \leq 7$ kaikilla n. Määritellään toinen jono (y_n) yhtälöllä

$$y_n = \frac{1}{n}x_n$$

Pitääkö välttämättä paikkansa, että

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0?$$

Ratkaisu.

Tehtävän jonosta (x_n) ei tiedetä paljoakaan. Se voi supeta tai hajaantua. Onneksi tehtävässä ei tarvitse miettiä miten jono (x_n) pomppii, vaan tutkia jonoa (y_n), jossa jonon jäsenet ovat jonon (x_n) luvuilla $1/n$ skaalattuja jäseniä. Koska $|y_n| = |\frac{1}{n}x_n| = \frac{1}{n}|x_n| \leq \frac{7}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, meillä on hyvät perusteet väittää, että $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. Todistetaankin se:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|y_n - 0| = |\frac{1}{n}x_n - 0| = \frac{1}{n}|x_n| \leq \frac{7}{n} < \varepsilon,$$

kun $n > 7/\varepsilon$. Tämä riittääkin osoittamaan, että $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.