MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 1 / Ratkaisuehdotuksia (AK)
14.9.2009 alkavalle viikolle

Näissä ohjauksissa opetellaan laskusääntöjen ja epäyhtälöiden huolellista käyttöä. Ratkaisuissa ei saa vedota raja-arvoihin, jatkuvuuteen tai derivaattoihin (-olemme opettelemassa perusasioita noiden käsitteiden täsmällistä käsittelyä varten.) Vastaukset pitää pyrkiä perustelemaan niin, että uskot kaverinkin uskovan mitä hänelle väität.

Ratkaisuehdotuksista: Tässä esitetään mahdollisimman huolelliset - paikoin kenties tarpeettomankin perusteelliset - perustelut tehtävien väitteille. Perustelut pohjaavat reaalilukujen aksiomiin (luentomonisteen sivu 4). Aksiomat eivät ole mitään sen ihmeellisempiä kuin koulusta tuttuja laskusääntöjä. Aksiomat on valittu niin, että niiden avulla voidaan perustella kaikki muut tutut laskusäännöt. Huomaa, että aksiomia ei tarvitse perustella. Ratkaisujen lopussa on lisähuomautuksia tehtävistä.

1. Miksi tiedot $x < y$ ja $y - x > 0$ ovat yhtäpitäviä?
Mielekäs perustelu tällaiselle matematiikan "miksi"-kysymykselle on väitteen perustelu. (Kyseessä on torstain luennon esimerkin yhden kohdan perustelu.)

Ratkaisu: Oletamme, että x ja y ovat reaalilukuja. Väitteemme on, että

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x > 0.$$

Merkintä $\Longleftrightarrow$ on *ekvivalenssinuoli*, joka tarkoittaa että tiedot $x < y$ ja $y - x > 0$ ovat keskenään *yhtäpitävät* eli seuraavat toinen toisistaan.

1° Osoitamme ensin $\Longrightarrow$-suunnan eli perustelemme miksi tiedosta $x < y$ seuraa, että $y - x > 0$ on voimassa.

Aksioman A(4) nojalla luvulla $x \in \mathbb{R}$ on vastaluku $-x \in \mathbb{R}$, ja voimassa on yhtälö $x + (-x) = 0$.

Aksioman B(3) nojalla

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + (-x) < y + (-x) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < y - x \quad \Longleftrightarrow \quad y - x > 0.$$

Ensimmäisen ekvivalenssin kohdalla olemme käyttäneet merkintäsopimusta $y + (-x) = y - x$ ja jälkimmäisen ekvivalenssin kohdalla järjestysrelaatiota koskevaa merkintäsopimusta: jos $a < b$ niin merkitsemme $b > a$. Väitteemme $\Longrightarrow$-suunta on näin osoitettu todeksi.

2° Osoitamme seuraavaksi väitteen $\Longleftarrow$-suunnan eli perustelemme miksi tiedosta $y - x > 0$ seuraa, että $x < y$.

Aksioman B(3) nojalla

$$y - x > 0 \quad \Longrightarrow \quad (y - x) + x > 0 + x.$$

Tässä pätee aksiomien A(2), A(3) ja A(4) sekä tehdyn merkintäsopimuksen nojalla, että

$$(y-x)+x = (y+(-x))+x \overset{A(2)}{=} y+((-x)+x) \overset{A(4)}{=} y+0 \overset{A(3)}{=} y \quad \text{ja} \quad 0+x \overset{A(3)}{=} x.$$

Siispä

$$y - x > 0 \quad \Longrightarrow \quad y > x \quad \text{eli} \quad y - x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x < y.$$

Kohdat 1° ja 2° yhdessä osoittavat, että väitteemme on tosi.

2. Miksi

$$x < \frac{x+y}{2} < y?$$

Ratkaisu: Huomaamme, että tehtävän epäyhtälöketju (kaksoisepäyhtälö) *ei* ole voimassa aina: jos esimerkiksi $x = 7$ ja $y = 3$, niin väite $7 < \frac{7+4}{2} < 3$ on tietenkin epätotta. Tehtävän kysymys on mielekäs vain silloin kun teemme oletuksen, että $x < y$.

Huomaa, että aksioman B(2) nojalla tiedosta $x < \frac{x+y}{2} < y$ seuraa *automaattisesti*, että $x < y$. Tämä ei perustele mitään. Tehtävänämme onkin osoittaa, että silloin kun $x < y$ pätee myös, että $x < \frac{x+y}{2} < y$!

Oletamme siis, että x ja y ovat reaalilukuja ja pätee $x < y$. Tehtävämme on perustella, että tällöin $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Aksioman B(3) perusteella tiedämme, että on sallittua *lisätä* epäyhtälön molemmille puolille sama luku, ja järjestyksen suunta säilyy. Lisäämme luvun $x \in \mathbb{R}$:

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad x + x < x + y.$$

Tässä pätee

$$x + x \overset{A(8)}{=} 1 \cdot x + 1 \cdot x \overset{A(5)}{=} x \cdot 1 + x \cdot 1 \overset{A(7)}{=} x(1+1) = x \cdot 2 = 2x.$$

Käytimme tietoa (tai merkintää) $1 + 1 = 2$. Siispä

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad 2x < x + y.$$

Seuraavaksi epäyhtälömme pitäisi ilmeisesti jakaa luvulla 2. Aksiomat eivät sano mitään järjestyksen käyttäytymisestä silloin, kun molemmat puolet kerrotaan (tai jaetaan) luvulla. Meidän tuleekin seuraavaksi perustella **aputulos** eli **lemma**:

Lemma 1. Epäyhtälön puolet saa kertoa positiivisella luvulla ja järjestys säilyy, toisin sanoen, voimassa on

$$x < y,\, z > 0 \quad \Longrightarrow \quad xz < yx.$$

Todistus: Tehtävänämme on siis perustella, että kun $x < y$ ja $z > 0$, niin $xz < yz$. Käytettävissämme ovat ainoastaan reaalilukujen aksiomat. Tehtävän 1 nojalla pätee

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad y - x > 0.$$

Nyt siis $y-x > 0$ ja $z > 0$. Tällöin aksioman B(4) nojalla $z(y-x) > 0$. Edelleen,

$$z(y-x) > 0 \quad \overset{A(7)}{\Longleftrightarrow} \quad zy - zx > 0 \quad \overset{A(5)}{\Longleftrightarrow} \quad yz - xz > 0.$$

Seuraavaksi käytämme jälleen aksiomaa B(3) (sekä aksiomia A(2)–(4)) ja lisäämme luvun xz:

$$yz - xz > 0 \quad \Longrightarrow \quad yz > xz \quad \text{eli} \quad xz < yz.$$

Apulauseemme on näin todistettu (eli perusteltu).

Palaamme sitten alkuperäisen väitteen perustelemiseen. Luvulla 2 on aksioman A(9) nojalla käänteisluku $2^{-1} = \frac{1}{2}$, joka on positiivinen (miksi muuten?), niin Lemman 1 nojalla pätee:

$$2x < x + y,\, \frac{1}{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(x+y).$$

Edelleen,

$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(x+y) \overset{A(6)}{\Longleftrightarrow} \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) x < \frac{1}{2}(x+y) \overset{A(9),A(8)}{\Longleftrightarrow} x < \frac{1}{2}(x+y) \Longleftrightarrow x < \frac{x+y}{2},$$

missä viimeisen ekvivalenssin kohdalla käytettiin aksiomassa A(9) sovittua merkintää. Olemme siis osoittaneet, että

$$x < y \Longrightarrow x < \frac{x+y}{2}.$$

Väitteemme jälkimmäisen epäyhtälön osoittamiseksi toimimme vastaavasti:

$$x < y \Longrightarrow x + y < y + y \Longleftrightarrow x + y < 2y \Longrightarrow \frac{x+y}{2} < y.$$

Yhdistämällä saadut epäyhtälöt toteamme, että

$$x < y \Longrightarrow x < \frac{x+y}{2} < y.$$

3. Onko olemassa kahta reaalilukua, jotka ovat niin lähellä toisiaan, ettei väliin mahdu yhtään reaalilukua?

Ratkaisu: Ei ole. Tämän perusteleminen on helppoa, kun osaa tulkita tehtävässä 2 osoitetun tiedon toisella tavalla! Nimittäin, olkoot x ja y kaksi eri reaalilukua. Tällöin tiedämme, että joko $x < y$ tai $y < x$. Voimme olettaa, että $x < y$ - jos näin ei ole, toisin sanoen, jos päteekin $y < x$, niin nimeämme lukumme uudestaan eli kutsumme pienempää lukua x:ksi ja suurempaa y:ksi.

Nyt tehtävän 2 nojalla tiedämme, että

$$x < \frac{x+y}{2} < y.$$

Lukujen x ja y välissä on siis aina vähintäänkin yksi reaaliluku, nimittäin luku $\frac{x+y}{2}$ eli lukujen keskiarvo.

Lisätieto: Itse asiassa, kahden eri reaaliluvun välissä on äärettömän monta reaalilukua. Ns. Arkhimedeen lauseen avulla voidaan osoittaa, että kahden eri reaaliluvun välissä on aina *äärettömän monta rationaalilukua* ja *äärettömän monta irrationaalilukua*. Todistus löytyy luentomonisteesta, Lause 2.10 sivulla 13.

4. $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Onko myös $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$?

Ratkaisu: Kyllä on. Asian perustelemiseksi palautamme mieleen, että rationaaliluvut ovat lukuja, jotka voidaan esittää kokonaislukujen osamääränä:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,:\, n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Havainnollisesti ajatellen, rationaalilukuihin kuuluvat kaikki kokonaisluvut, murtoluvut sekä päättyvät ja jaksolliset murtoluvut - nämä voidaan aina esittää kokonaislukujen osamäärinä eli murtolukuina. Irrationaalilukuja ovat kaikki reaaliluvut, jotka eivät ole rationaalilukuja. Irrationaalilukujen joukolla ei tiettävästi ole omaa symbolia, irrationaalilukujen joukkoa merkitään usein $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Lähdetään nyt tarkastelemaan lukua $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$. Ensimmäinen idea on muokata/sieventää tätä murtolauseketta niin, että se tulisi "helpommin luettavaan muotoon". Koulusta muistamme, että $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, joten lausekkeemme nimittäjä saadaan yksinkertaisemmaksi, jos lavennamme murtolausekkeen luvulla $\sqrt{2}-1$. Laventaminen, kuten muistetaan, tarkoittaa murtolausekkeen osoittajan ja nimittäjän kertomista samalla luvulla. Itse asiassa kysymys on luvulla 1 kertomisesta (ja samalla tulemme perustelleeksi, miksi laventaminen on sallittua):

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} &\overset{(1)}{=} 1 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \overset{(2)}{=} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 1}{1} = 3 - 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Perusteluja:
(1) aksioma A(8)
(2) aksioma A(9): luvulla $\sqrt{2}-1 \neq 0$ on käänteisluku $(\sqrt{2}-1)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$, ja voimassa on yhtälö $1 = (\sqrt{2}-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}$

Pätee siis, että

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Tiedämme, että luku $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Väitämme seuraavaksi, että myös luku $2\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Väitteen eli teesin perustelemiseksi teemme **antiteesin** eli **vastaoletuksen**: väitämme, että luku $2\sqrt{2}$ onkin rationaaliluku ja pyrimme johtamaan tästä ristiriidan (eli osoittamaan, että jos lukumme olisi rationaaliluku, niin siitä seuraisi jotain, mikä ei ole totta).

Antiteesimme nojalla on olemassa sellaiset kokonaisluvut n ja m, $m \neq 0$, että

$$2\sqrt{2} = \frac{n}{m}.$$

Tästä seuraa, että

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{m} \Longleftrightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{2m}.$$

Koska luku m on kokonaisluku, niin myös luku $2m$ on kokonaisluku. Antiteesistämme seuraa siis, että luku $\sqrt{2}$ on kahden kokonaisluvun osamäärä eli rationaaliluku! Tämä on mahdotonta sillä tiedämme, että $\sqrt{2}$ on irrationaaliluku. Saimme ristiriidan. Antiteesimme on näin ollen väärä ja alkuperäinen väite on oikea: luku $2\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

Tällöin myös $-2\sqrt{2}$ on irrationaaliluku ja edelleen luku $-2\sqrt{2}+3 = 3-2\sqrt{2}$ on irrationaaliluku (koska kokonaisluvun lisääminen muuttaa vain luvun kokonaisosaa). Olemme näin perustelleet, että luku $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3-2\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.

LISÄHUOMAUTUKSIA:

Tehtävä 1. Matematiikassa *aksioma* (eli peruslause) on peruskäsitteiden epäsuora määritelmä, jota käytetään päättelyssä muiden tulosten todistamiseen.

Matematiikassa mikä tahansa ristiriidaton lausejoukko voidaan asettaa aksiomajärjestelmäksi. Toivottavaa on, että aksiomia ei voida johtaa toisista aksiomista vaan että aksiomajoukko on *pienin mahdollinen* peruskäsitteiden määrittelemiseen riittävä lausejoukko.

Tehtävä 2. Perustelimme, että epäyhtälön saa kertoa *positiivisella* luvulla ja järjestys säilyy. Kuten tiedetään, *negatiivisella* luvulla kertominen ”kääntää epäyhtälömerkin suunnan”. Miten perustelisit tämän? Vinkki: jos luku $z < 0$, niin $-z > 0$ (miksi?)

Tehtävä 3. Ohjausryhmissämme mietimme myös kysymystä ”Mikä luku tulee luvun 2 jälkeen?” Jos lähdemme jäljittämään luvun 2 jälkeen ”heti seuraavana tulevaa” reaalilukua, joudumme vaikeuksiin – tällaista lukua ei ole! Tehtävässä 2 perustelimme nimittäin, että kahden eri reaaliluvun välissä on aina vähintään yksi reaaliluku – lukujen keskiarvo. Jos väittäisimme, että luvun 2 jälkeen heti seuraavana tuleva reaaliluku olisi olemassa, näiden lukujen väliin mahtuisi yhtä hyvin lukujen keskiarvo, ja keskiarvo olisikin luvun 2 jälkeen seuraavana tuleva luku. Mutta jälleen keskiarvon ja luvun 2 väliin mahtuisi uusi keskiarvo jne.

Päättely on läheistä sukua *Akilles ja kilpikonna* –nimiselle ajatusleikille, joka tunnetaan myös *Zenonin paradoksina*. Se esiintyi jo antiikin aikana Aristoteleen Fysiikka–teoksessa. Paradoksin on tarkoitus osoittaa, että jos hitaammalle juoksijalle annetaan vähänkin etumatkaa, ei nopeampi juoksija pysty ohittamaan häntä vaan hitaampi on aina maalissa ensin:

Ketteräjalkaisen Akilleksen ja hitaamman kilpikonnan kilpajuoksussa kilpikonnalla on kymmenen metrin etumatka. Oletetaan, että Akilles kulkee kymmenen kertaa nopeammin kuin kilpikonna. Juoksijat lähtevät matkaan. Kun Akilles on savuttanut kilpikonnan lähtöpisteen (kulkenut siis 10 metriä), on kilpikonna, vaikka hidas onkin, ehtinyt edetä tästä yhden metrin eteenpäin. Kun Akilles saavuttaa tämän pisteen, on kilpikonna edennyt 10 senttimetriä eteenpäin. Kun Akilles saavuttaa tämän pisteen, on kilpikonna edennyt yhden senttimetrin eteenpäin, jne. Akilleen saavuttaessa kilpikonnan aiemman olinpaikan on kilpikonna ehtinyt jälleen edetä eteenpäin 1/10 matkasta, joka oli Akilleen tavoitettavana aiemmin, ja on siis edelleen Akilleen edellä. Jokaisessa vaiheessa välimatka lyhenee yhteen kymmenesosaan mutta koska kilpikonnakin on liikkeessä, seuraako tästä, ettei Akilles koskaan saavuta kilpikonnaa?

Ajatusleikki lienee herättänyt ihmetystä aikana, jolloin raja-arvoja ja äärettömiä summia (eli sarjoja) ei vielä ollut keksitty. Sarjateoria kehittyi differentiaali- ja integraalilaskennan rinnalla vasta 1600-luvun lopulta lähtien Newtonin, Leibnizin ja muiden aikalaisten työn tuloksena. Mahdollinen paradoksaalinen johtopäätös, jonka mukaan Akilles ei koskaan saavuta kilpikonnaa selittyy siten, että vaikka ajanhetkiä, jolloin Akilles on kilpikonnan takana onkin ääretön määrä, on kokonaisaika, jonka Akilles on kilpikonnan takana kuitenkin äärellinen.

Tehtävä 4. Soveltamalla tehtävässä tehtyä päättelyä voimme osoittaa yleisemmän tuloksen: rationaaliluvun ja irrationaaliluvun tulo on aina irrationaalinen.