Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Analyysi 1
Harjoitus 3
28.9.2009 alkavalle viikolle
Näissä harjoituksissa harjoitellaan lukujonon raja-arvon määritelmän käyttöä.
Ratkaisuehdotuksia (Laura Tuohilampi)

1. Oletetaan, että kaikilla n on

$$x_n = \frac{n+1}{3n}\ .$$

Osoita, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

Ratkaisu: Lukujonon raja-arvon määritelmä kuuluu seuraavasti: Lukujonolla x_n on raja-arvo $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - a| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Meidän on siis löydettävä jokin n_ε, eli riittävän suuri n:n arvo, joka esittämällä pätee

$$\left|\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon,$$

olipa ε mikä tahansa, toisin sanoen miten pieni tahansa, positiivinen luku. Lähdetään etsimään sopivaa lukua n_ε erotuksen itseisarvoa sieventämällä:

$$\left|\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n+3-3n}{9n}\right| = \left|\frac{1}{3n}\right| = \frac{1}{3n}\ .$$

Jos nyt lausekkeemme on pienempi kuin mielivaltaisesti annettu ε, saadaan yhtäpitävyys:

$$\frac{1}{3n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

Tämän huomion avulla voimme valita luvuksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ minkä tahansa kokonaisluvun, joka on suurempi kuin $\frac{1}{3\varepsilon}$. Tällöin aina, kun $n > n_\varepsilon$, niin $n > \frac{1}{3n}$ ja $\frac{1}{3n} < \varepsilon$, josta saamme

$$\left|x_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

kaikilla $\varepsilon > 0$,kun $n > n_\varepsilon$.
Olemme siis osoittaneet, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$.

2. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{2n^2+1} = 0.$$

Ratkaisu: Osoitetaan, edellisen tehtävän tapaan, että lukujonon $\frac{3n-7}{2n^2+1}$ raja-arvo on nolla. Millä tahansa annetulla luvulla $\varepsilon > 0$ tulisi siis olla:

$$\left|\frac{3n-7}{2n^2+1} - 0\right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon \in \mathbb{N}$.

Koska muotoon

$$\left|\frac{3n-7}{2n^2+1}\right|$$

typistyvää itseisarvolauseketta ei voi kovin suoraviivaisesti supistaa, on avarrettava ajattelutapaa. Arvioidaan ensinnäkin lausekkeen suuruutta:

$$\left|\frac{3n-7}{2n^2+1}\right| < \left|\frac{3n-7}{2n^2}\right| < \left|\frac{3n}{2n^2}\right| = \frac{3}{2n}.$$

Saadaan lauseke, joka on aidosti suurempi kuin tarkastelemamme itseisarvo. Jos nyt löydämme sellaisen n_ε, että $\frac{3}{2n} < \varepsilon$ aina, kun $n > n_\varepsilon$, niin tiedämme samalla myös, että alkuperäinen lausekkeemme on pienempi kuin samainen ε, kun $n > n_\varepsilon$. Etsimme siis tarvittavan luvun n_ε lausekkeen $\frac{3}{2n}$ avulla. Saamme yhtäpitävyyden

$$\frac{3}{2n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{3}{2\varepsilon}.$$

Valitsemalla siis luvuksi n_ε jokin lukua $\frac{3}{2\varepsilon}$ suurempi kokonaisluku, saadaan

$$\left|\frac{3n-7}{2n^2+1}\right| < \left|\frac{3}{2n}\right| < \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Siis olemme todistaneet, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-7}{2n^2+1} = 0.$$

3. Osoita, että

$$\frac{2n^2+1}{3n^3-1} \;\to\; 0 \; kun \; n \;\to\; \infty.$$

Ratkaisu: Ratkaistavanamme on taas raja-arvotehtävä. Aloitetaan muokkaamalla itseisarvolauseketta: Koska $n \geq 1$, saadaan:

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^3-1} - 0\right| \;=\; \frac{2n^2+1}{3n^3-1} \;\leq\; \frac{2n^2+n^2}{3n^3-n^3} \;=\; \frac{3n^2}{2n^3} \;=\; \frac{3}{2n}$$

Nyt olemme tilanteessa, joka erehdyttävästi muistuttaa edellisessä tehtävässä käsiteltyä tapausta. Saamme nimittäin, taas, yhtäpitävyyden

$$\frac{3}{2n} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; n > \frac{3}{2\varepsilon},$$

kun mielivaltainen luku $\varepsilon > 0$ on annettu. Valitsemalla nyt $n_\varepsilon > \frac{3}{2\varepsilon}$, pätee

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^3-1} - 0\right| \;\leq\; \frac{3}{2n} \; < \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Tehtävä suoritettu.

4. Oletetaan, että $2 < \lim_{n\to\infty} x_n < 3$. (Oletus sisältää tiedon, että tutkittava jono suppenee.) Osoita, että on olemassa sellainen K, että $2 < x_n < 3$ kaikilla $n > K$. Tämäkin tehtävä on tarkoitus tehdä käyttäen suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää.

(Tehtävänannossa oli painovirhe, kuten useimmat varmaan huomasivat tai saivat jotakin kautta tietoonsa. Siinä pyydettiin osoittamaan, että on olemassa sellainen K, että $1 < x_n < 2$ kaikilla $n > K$. Koska raja-arvo on välillä $(2, 3)$, on selvää, että tällaista lukua K ei ole olemassa, se olisi vastoin raja-arvon määritelmää. Asia tulee todistetuksi, kun osoitamme että ylläoleva väite pätee, ja kun tiedetään, että lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen.)

Ratkaisu: Oletus on, että $2 < \lim_{n\to\infty} x_n < 3$. Tiedämme siis jotakin raja-arvon suuruudesta. Merkitään nyt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Siis

$$2 < a < 3 \;\Leftrightarrow\; a - 2 > 0 \; ja \; 3 - a > 0$$

Valitaan nyt $\varepsilon = min\{(a-2), (3-a)\}$. Koska a on lukujonon x_n raja-arvo, on määritelmän perusteella olemassa sellainen n_ε, että $|x_n - a| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Oletetaan nyt, että $n > n_\varepsilon$. Tällöin $|x_n - a| < \varepsilon - 2$, joten itseisarvolemman mukaan

$$-a + 2 < x_n - a < a - 2$$

$$2 < x_n < 2a - 2 \;.$$

Edelleen $|x_n - a| < \varepsilon \leq 3 - a$, joten vastaavasti

$$a - 3 < x_n - a < 3 - a$$

$$2a - 3 < x_n < 3 \;.$$

Siis $2 < x_n < 3$, kun $n > n_\varepsilon$. Luvuksi K voidaan siis valita luku n, joten olemme osoittaneet, että halutunlainen K on olemassa.

5. Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} \;=\; 1$$

ei pidä paikkaansa. Ratkaisussa pitää käyttää suoraan lukujonon raja-arvon määritelmää. (Lisäkysymys, jonka ratkaisua ei vaadita: seuraisiko tulos myös tehtävästä 1 ja monisteen lauseista?)

Ratkaisu: Käytämme ratkaisussa suoraan raja-arvon määritelmää. Meidän on siis osoitettava, että mielivaltaiselle luvulle $\varepsilon > 0$ ei ole olemassa sellaista lukua n_ε, että

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Aloitetaan taas muokkaamalla lauseketta. Koska $n \geq 1$ ja $|a| = |-a|$, niin

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| = \left|\frac{n+1}{3n-1}\right| = \left|\frac{1-2n}{3n}\right| = \left|-\frac{1-2n}{3n}\right| = \left|\frac{2n-1}{3n}\right| = \frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n} < \frac{2}{3}.$$

Siis pätee ainakin

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| < \frac{2}{3}.$$

Jotta voisimme osoittaa, että väite ei pidä paikkaansa, meidän olisi nyt löydettävä jokin luvun n arvo, josta alkaen

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| > \varepsilon,$$

kun $\varepsilon < \frac{2}{3}$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Nyt saamme yhtäpitävyyden

$$\frac{2n-1}{3n} > \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; 3(2n-1) > 3n \;\Leftrightarrow\; n > 2.$$

Nyt tiedämme siis, että jos $n > 2$, niin

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| > \frac{1}{3},$$

joten ei ole olemassa sellaista lukua n_ε, että

$$\left|\frac{n+1}{3n} - 1\right| > \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon$. Olemme osoittaneet, että väite ei pidä paikkaansa.

Lisäkysymys: Tulos seuraisi myös tehtävästä 1 sekä monisteen lauseesta 4.1: *Lukujonolla voi olla enintään yksi raja-arvo.* Tehtävässä 1 osoitimme, että lukujonon

$$x_n = \frac{n+1}{3n}$$

raja-arvo on $\frac{1}{3}$. Tiedämme myös, että $1 \neq \frac{1}{3}$. Siis lauseen 4.1. nojalla tehtävän väite ei pidä paikkaansa.

6. Oletetaan, että kaikilla n on

$$x_n \;=\; (-1)^n n.$$

Suppeneeko vai hajaantuuko jono (x_n)? Tässä tehtävässä saa käyttää vapaasti monisteen lauseita.

Ratkaisu: Yksi tapa lähteä selvittämään asiaa on raja-arvon olemasssaolon tarkastelu; jos raja-arvo on olemassa, jono suppenee, jos ei, jono hajaantuu. Oletetaan, että on olemassa raja-arvo a, ja katsotaan kuinka käy. Jos raja-arvo on olemassa, pätee mielivaltaisella luvulla $\varepsilon > 0$

$$|(-1)^n n - a| < \varepsilon, \; kun \; n > n_\varepsilon.$$

Tarkastellaan lauseketta $|(-1)^n n - a|$. Kolmioepäyhtälön vasemman puolen avulla saamme

$$|(-1)^n n - a| \;\geq\; ||(-1)^n n| - |-a|| \;=\; |n - |a||\,.$$

Siis $|n - |a|| \;\leq\; |(-1)^n n - a|$, joten jos $|n - |a||$ saadaan "suureksi", niin olemme hoitaneet homman. Jos nyt oletamme, että $n > 1 + |a|$, niin

$$|x_n - a| \geq |n - |a|| \;=\; n - |a| \;>\; 1 + |a| - |a| \;=\; 1.$$

Siis jos $\varepsilon \leq 1$, ei löydy sellaista lukua n_ε, että $|x_n - a| < \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Raja-arvoa ei siis ole olemassa, joten jono (x_n) hajaantuu.