MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 2
15.9.2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdoituksia
$\mathbb{R}$ami Luisto
Sivuja: 5

1. (a) Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön $|2x-5| < 1$? (b) Entä epäyhtälön $0 < |2x-5| < 1$? Kannattaa käyttää itseisarvolemmaa ja huomata, että $|t| > 0$ täsmälleen silloin kuin $t \neq 0$.

Ratkaisu: (a): Itseisarvolemman perusteella:

$$|2x-5| < 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -1 < 2x-5 < 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 4 < 2x < 6 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 2 < x < 3.$$

Selitykset:
(1) Itseisarvolemma.
(2) Lisätään epäyhtälöketuun puolittain 5.
(3) Jaetaan epäyhtälöketju puolittain kahdella.

(b): Väite on tosi täsmälleen silloin, kun $|2x-5| < 1$ ja $|2x-5| > 0$. Ensimmäinen ehto toteutuu a-kohdan perusteella täsmälleen silloin kun $2 < x < 3$ ja jälkimmäinen ehto saadaan ratkaistua vihjeen perusteella:

$$|2x-5| > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2x-5 \neq 0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 2x \neq 5 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x \neq \frac{5}{2}.$$

Selitykset:
(1) Vihje.
(2) Lisätään epäyhtälöön puolittain 5.
(3) Jaetaan epäyhtälö puolittain kahdella.

Nämä kaksi yhdistämällä saadaan siis, että

$$0 < |2x-5| < 1 \Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2} \text{ tai } \frac{5}{2} < x < 3.$$

2. Oletetaan, että $|x-e| < 2^{-1000}$ ja $|y-\pi| < 2^{-1000}$. Mitä voit kolmioepäyhtälön avulla päätellä summien välisestä etäisyydestä $|(x+y)-(e+\pi)|$?

Ratkaisu: Meillä on tietoa x:n ja e:n etäisyydestä sekä y:n ja π:n etäisyydestä. Päästäksemme hyödyntämään näitä arvioita tarvitsisimme lausekkeen, jossa on muotoa $x-e$ ja $y-\pi$ olevia termejä. Tällainen saadaan onneksi esille jaottelemalla termejä sopivasti:

$$\begin{aligned}&|(x+y)-(e+\pi)| = |x+y-e-\pi| = |(x-e)+(y-\pi)| \\ \overset{\Delta\text{-ey.}}{\leq}\ &|x-e| + |y-\pi| < 2^{-1000} + 2^{-1000} = 2 \cdot 2^{-1000} = 2^{-999}\end{aligned}$$

Eli saamme siis, että välttämättä $|(x+y)-(e+\pi)| < 2^{-999}$.

3. Etsi sellainen luku $K > 0$, jolle kaikilla välin $]0,2[$ pisteillä x pätee

$$\left|\frac{x+3}{2x+5} - \frac{4}{7}\right| \leq K|x-1|.$$

Ratkaisu: Lähdetään rohkeasti tutkimaan erotuksen itseisarvoa. Sievennetään aluksi erotus ja katsotaan, löydämmekö jotain kiinnostavaa.

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x+3}{2x+5} - \frac{4}{7}\right| = \left|\frac{7(x+3)}{7(2x+5)} - \frac{4(2x+5)}{7(2x+5)}\right| = \left|\frac{7x+21-8x-20}{7(2x+5)}\right| \\
&= \left|\frac{-x+1}{7(2x+5)}\right| = \left|(-1)\frac{x-1}{7(2x+5)}\right| = \left|\frac{x-1}{7(2x+5)}\right| = \frac{|x-1|}{\underbrace{|7(2x+5)|}_{\geq 0,\ \text{sillä}\ x>0}} \\
&= \frac{|x-1|}{7(2x+5)}
\end{aligned}$$

Erotuksesta siis putkahtaa esiin jotain muotoa $|x-1| \cdot (\spadesuit)$, joten meidän pitää enää keksiä, miten arvioida termiä $\spadesuit$ ylöspäin joksikin vakioksi. Tutkimme pelkästään niitä lukuja x, jotka ovat välillä $]0,2[$, eli erityisesti meitä kiinnostaa vain tilanne kun $x > 0$. Joten arvioimalla nimittäjää alaspäin koko lausekkeen arvo kasvaa:

$$\frac{|x-1|}{7(2x+5)} \overset{(x>0)}{\leq} \frac{|x-1|}{7(2\cdot 0+5)} = \frac{|x-1|}{35} = \underbrace{\left(\frac{1}{35}\right)}_{=K}|x-1|$$

Täten esimerkiksi valinta $K = \frac{1}{35}$ kelpaa halutuksi luvuksi. (Tosin koska $\frac{1}{35} < 1 < 2345 < 9469516384723590\pi$, niin luvuksi K kelpaisi mikä tahansa luvuista $1, 2345, 9469516384723590\pi$. Tai siis ylipäätänsä mikä tahansa lukua $\frac{1}{35}$ suurempi luku.)

Toinen tapa arvioida lauseketta $\frac{|x-1|}{7(2x+5)}$ ylöspäin olisi tehdä vielä järkympi arvio x:lle. Nimittäin jos $x > 0$, niin tällöin pätee varmasti myöskin, että $x > -1$. Tällöin saisimme

$$\frac{|x-1|}{7(2x+5)} \leq \frac{|x-1|}{7(2(-1)+5)} = \frac{1}{21}|x-1|,$$

eli luvuksi K kelpaisi $\frac{1}{21}$.

(Tässä tehtävässä hiivitään salaa lähemmäs todistusta sille, että $\lim_{x\to 1} \frac{x+3}{2x+5} = \frac{4}{7}$. *)*

4. Oletetaan, että $|x-5| < 4^{-99}$. Pitääkö välttämättä paikkansa $|x^2-25| < 4^{-97}$? Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|x^2-25|$.

Ratkaisu: Lähdetään taas rohkeasti pyörittelemään erotuksen itseisarvoa. Sovelletaan ihan aluksi annettua vinkkiä tulona kirjoittamisesta:

$$\left|x^2-25\right| = |(x+5)(x-5)| = |x+5|\,|x-5|$$

Tämä näyttää varsin lupaavalta, sillä luvusta $|x-5|$ meillä on jo tarkka arvio. Mutta miten arvioida termiä $|x+5|$? Löydämme arvion, kun huomaamme, että annettu arvio $|x-5| < 4^{-99}$ tarkoittaa sitä, että x on todella lähellä lukua 5. Jos luku x on siis lähellä lukua 5, tarkoittaa se, että luvun $x+5$ on oltava aika lähellä lukua kymmenen. Formaloidaan vähän tätä ajatusketjua:

$$\begin{aligned}
&|x-5| < 4^{-99} < 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} |x-5| < 1 \\
&\overset{(2)}{\Leftrightarrow} -1 < x-5 < 1 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 4 < x < 6 \\
&\overset{(4)}{\Leftrightarrow} -11 < 9 < x+5 < 11 \overset{(5)}{\Rightarrow} -11 < x+5 < 11 \\
&\overset{(6)}{\Rightarrow} |x+5| < 11.
\end{aligned}$$

Selityksiä:

(1) Emme oikeastaan tarvitse liian tarkkaa tietoa, kunhan saamme jonkin arvion. (Ykkönen otettiin tässä käyttöön lähinnä mukavuussyistä. Myöhemmin näemme, että se toimii käytössämme oikein hyvin.)

(2) Itseisarvolemma.

(3) Lisätään epäyhtälöketjuun puolittain 5. Tässä kohtaa saisimme jo arvion luvulle x. Jatketaan kuitenkin vielä eteenpäin, suoraan luvun $x+5$ itseisarvon arvioon.

(4) Lisätään epäyhtälöketjuun taas puolittain 5.

(5) Huononnetaan arviota taas, jotta voimme käyttää itseisarvolemmaa.

(6) Itseisarvolemma.

Saimme siis aikaan arvion termille $|x+5|$. [1] Tätä hyödyntämällä voimme jatkaa:

$$\begin{aligned}
&\left|x^2-25\right| = |(x+5)(x-5)| = |x+5|\,|x-5| \le |x+5|\,4^{-99} \\
&\le 11 \cdot 4^{-99} \overset{(*)}{<} 16 \cdot 4^{-99} = 4^2 \cdot 4^{-99} = 4^{-97}.
\end{aligned}$$

(*) Haluamme saada arvioitua ylöspäin johonkin nelosen potenssiin, jotta arvio sievenisi.

Huomaamme siis, että väite välttämättä pätee.

(Tässä tehtävässä ja etenkin seuraavassa tehtävässä hiivitään salaa lähemmäs todistusta sille, että $\lim_{x\to 5} x^2 = 25$. *)*

5. Etsi sellainen luku $h > 0$, että $|x^2-25| < 10^{-100}$, aina kun $|x-5| < h$. (Tässä "aina kun" tarkoittaa samaa kuin "kaikilla sellaisilla x, joille pätee ...") Tehtävässä kannattaa käyttää edellisen tehtävän arvioita lausekkeelle $|x^2-9|$.

Ratkaisu: Aloitetaan ratkaiseminen osiolla "pohdiskelu". Tutkitaan siis aluksi erotuksen itseisarvoa $|x^2-25|$.

[1] Tämän arvion voisi saada myös kolmioepäyhtälöä käyttämällä:

$$|x+5| = |(x-5)+10| \overset{\Delta-\text{ey.}}{\le} \underbrace{|x-5|}_{<1} + |10| < 1 + 10 = 11.$$

$$|x^2 - 25| = |(x+5)(x-5)| = |x+5||x-5|$$

(Okei, teimme ihan saman äskeisessä tehtävässä, mutta itseisarvoyhtälöiden pyörittely on aina kivaa.)

Saamme siis erotuksen osamäärälle arvion, jossa on termit $|x+5|$ ja $|x-5|$. Termin $|x-5|$ arvioiminen meillä on jo tavallaan hallinnassa, sillä sille on ylärajana luku h, jonka suuruuden saamme 'itse päättää'. Termin $|x+5|$ arviointiin tarvitaan jotain lisää.

Intuitiivisesti olemme etsimässä jotain todella pientä (eli lähellä nollaa olevaa) lukua h, eli olemme kiinnostuneita tilanteista, joissa luku x on todella lähellä vitosta. Jos meillä olisi käytössä luku h, joka on pienempi kuin yksi, tarkoittaisi se, että luku x olisi aika lähellä vitosta ja luku $x+5$ siis aika lähellä kymppiä. Formalisoidaan tätä ajatusta. (Tämä kohta tapahtuu samalla tavalla kuin tehtävässä, mutta tässä tehtävässä meidän pitää olettaa, ainakin vielä tässä vaiheessa, että $h < 1$.)

$$\begin{aligned}
&|x-5| < 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} -1 < x-5 < 1 \\
&\overset{(2)}{\Leftrightarrow} -11 < 9 < x+5 < 11 \overset{(3)}{\Rightarrow} -11 < x+5 < 11 \\
&\overset{(4)}{\Rightarrow} |x+5| < 11.
\end{aligned}$$

Selityksiä: [2]
(1) Itseisarvolemma.
(2) Lisätään epäyhtälöketjuun puolittain 10.
(3) Huononnetaan arviota taas, jotta voimme käyttää itseisarvolemmaa.
(4) Itseisarvolemma.

Eli mikäli meillä on ykköstä pienempi h, niin saamme seuraavanlaisen arvion:

$$|x^2 - 25| = |x+5||x-5| \leq 11 \cdot |x-5| < 11h.$$

Haluaisimme arvioida lausekkeen arvoa ylöspäin lukuun 10^{-100}. Meillä on jo arvio lukuun $11h$, joten jos saamme tämän arvion pienemmäksi kuin 10^{-100}, olemme kuivilla vesillä. Tämä onnistuu kun huomaamme, että

$$11h < 10^{-100} \Leftrightarrow h < \frac{1}{11} \cdot 10^{-100}.$$

Tarvitsemme siis ensimmäiseen arvioon tietoa $h < 1$ ja toiseen arvioon tietoa $h < \frac{1}{11} \cdot 10^{-100}$. Tämä onnistuu, kun valitsemme luvun h pienemmäksi kuin kumpikaan näistä luvuista, eli olkoon vaikka $h = 10^{-102}$. Tällöin $h < 1$ ja $h < \frac{1}{11} \cdot 10^{-100}$, joten viimein saamme:

$$|x^2 - 25| = |x+5||x-5| \leq 11 \cdot |x-5| < 11h < \cancel{11} \cdot \frac{1}{\cancel{11}} \cdot 10^{-100} = 10^{-100},$$

---

[2] Tämänkin arvion voisi hankkia kolmioepäyhtälöä käyttämällä:

$$|x+5| = |(x-5)+10| \overset{\Delta-\text{ey.}}{\leq} \underbrace{|x-5|}_{<1} + |10| < 1 + 10 = 11.$$

Eli $|x^2 - 25| < 10^{-100}$, kunhan $|x - 5| < 10^{-102}$.

6. Etsi sellainen luku $h > 0$, että $|\sqrt{x} - 1| < 10^{-1000}$, aina kun $|x - 1| < h$. Tehtävässä kannattaa arvioida ylöspäin lauseketta $|\sqrt{x} - 1|$ "lavennustempun" avulla.

Ratkaisu: Lähdetään liikkeelle kuten edellisessä tehtävässä, eli vihjeen mukaan avaamalla erotuksen itseisarvoa.

$$\left|\sqrt{x} - 1\right| = \left|\frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1}\right| = \left|\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\right|$$

Taas meillä on mukana termi $x - 1$, joka meillä on hallinnassa, sillä voimme itse 'valita' luvun x maksimietäisyyden ykkösestä luvun h avulla. Alakertakin meillä on hallussa, sillä tiedämme, että $\sqrt{x} \geq 0$, joten arvioimalla lukua $\sqrt{x}$ alaspäin nimittäjässä, koko lausekkeen arvo kasvaa:

$$\left|\sqrt{x} - 1\right| = \left|\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\right| \leq \left|\frac{x - 1}{0 + 1}\right| = |x - 1|$$

Nyt jos valitaan $h \leq 10^{-100}$, esimerkiksi $h = 10^{-314159265358979}$, niin saadaan että:

$$\left|\sqrt{x} - 1\right| = \left|\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\right| \leq |x - 1| < h \leq 10^{-100}.$$

Toinen tapa saada arvio olisi tehdä termille $\sqrt{x}$ vähän jännempi arvio. Tiedämme nimittäin, että koska aina pätee, että $\sqrt{x} \geq 0$, niin erityisesti $\sqrt{x} > -\frac{1}{2}$. Nyt voisimme arvioida:

$$\left|\frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\right| \leq \left|\frac{x - 1}{-\frac{1}{2} + 1}\right| = 2|x - 1|.$$

Tällöin tekemällä luku $2|x-1|$ pienemmäksi kuin 10^{-100}, eli valitsemalla vaikka $h = \frac{1}{2}10^{-100}$ saisimme taas halutun tuloksen.

Tässä kohtaa ei pidä huolestua siitä, että $\sqrt{x}$ ei saa arvoa $-\frac{1}{2}$ millään x:n arvolla. Tärkeätä on vain huomata, että neliöjuuri on aina tuon luvun yläpuolella.

(Tässä tehtävässä hiivitään salaa lähemmäs todistusta sille, että $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$. *)*