MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Harjoitus 1
14. 9. 2009 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Tiina Kainulainen)

1. Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y, että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nollalla ei saa jakaa?

Ratkaisu: Jos olisi olemassa sellainen reaaliluku y, että $0 \cdot y = 1$, niin tästä päädyttäisiin ristiriitaan, sillä toisaalta luvun 0 ominaisuuksiin kuuluu, että $0 \cdot x = 0$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, ja $0 \neq 1$. Siispä tällaista lukua y ei voi olla olemassa.

Äsken mainittu luvun 0 ominaisuus seuraa reaalilukujen aksioomista seuraavasti: Koska $x + 0 = x$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$, niin $0 + 0 = 0$, ja tällöin

$$\begin{aligned} 0 \cdot x &= (0+0) \cdot x \\ 0 \cdot x &= 0 \cdot x + 0 \cdot x \\ 0 \cdot x - 0 \cdot x &= 0 \cdot x + 0 \cdot x - 0 \cdot x \\ 0 &= 0 \cdot x. \end{aligned}$$

Rivillä 2 on sovellettu osittelulakia (aksiooma), ja rivillä 3 lisätty yhtälön molemmille puolille luvun $0 \cdot x$ vastaluku, jollainen on myöskin aksioomien nojalla olemassa.

2. Oletetaan, että $x < 3$ ja $y \leq 2$. Pitääkö tällöin välttämättä paikkansa, että $xy < 6$? Miten perustelisit väitteesi? Voit vapaasti käyttää luennolla esillä olleita suuruusjärjestyksen ominaisuuksia.

Ratkaisu: Jos oletetaan vain, että $x < 3$ ja $y \leq 2$, niin väite ei pidä paikkaansa. Voidaan nimittäin valita vaikkapa $x = -12$ ja $y = -3$, jolloin $x < 3$ ja $y \leq 2$, mutta $xy = 36 \geq 6$.

Kiinnostavampi tapaus on tutkia sellaisia x ja y, että $0 \leq x < 3$ ja $0 \leq y \leq 2$. Tällöin väite pitää paikkansa: Jos jompikumpi luvuista x ja y on 0, niin niiden tulo on nolla, eli $xy = 0 < 6$. Oletetaan sitten, että x ja y ovat aidosti positiivisia. Pidetään tämä mielessä ja kerrotaan epäyhtälön $x < 3$ molemmat puolet positiivisella luvulla y, jolloin epäyhtälö säilyy ja saadaan epäyhtälö $xy < 3y$. Toisaalta tiedämme, että $y \leq 2$, ja kertomalla tämä epäyhtälö puolittain luvulla 3 saadaan $3y \leq 6$. Yhdistämällä nämä tiedot saadaan $xy < 3y \leq 6$, mistä seuraa $xy < 6$.

3. Ovatko seuraavat väitteet tosia
(a) $x^2 < x$ aina kun $0 < x < 1$?
(b) $x < x^2$ aina kun $1 < x$?
(c) $x^2 < y^2$ aina kun $x < y$?
(d) $x^2 < y^2$ aina kun $0 < x < y$?
Yritä perustella tuloksesi monisteessa ja luennoilla käsiteltyjen suuruusjärjestyksen ominaisuuksien avulla.

Ratkaisu:
(a) Väite pitää paikkansa. Oletuksen mukaan $x < 1$ ja lisäksi x on aidosti positiivinen. Kertomalla epäyhtälön $x < 1$ molemmat puolet positiivisella luvulla x saadaan epäyhtälö $x^2 < x$, sillä epäyhtälömerkin suunta säilyy.
(b) Tämäkin pätee. Oletuksesta seuraa, että nytkin x on aidosti positiivinen, joten kertomalla epäyhtälön $1 < x$ molemmat puolet luvulla x saadaan epäyhtälö $x < x^2$.
(c) Tämä väite ei ole tosi. Jos luvut ovat negatiivisia, niin toiseen potenssiin korottaminen vaihtaa niiden suuruusjärjestyksen: esimerkiksi voidaan valita $x = -3$ ja $y = -2$, jolloin $x < y$, mutta $x^2 = 9 > 4 = y^2$.
(d) Tämä taas pitää paikkansa. Kuten edellisestä kohdasta nähdään, on oleellista että luvut ovat positiivisia. Nyt voidaan kertoa epäyhtälön $x < y$ molemmat puolet positiivisella luvulla x ja saadaan epäyhtälö $x^2 < xy$. Vastaavasti kerrotaan epäyhtälön $x < y$ molemmat puolet positiivisella luvulla y ja saadaan epäyhtälö $xy < y^2$. Yhdistämällä nämä saadaan $x^2 < xy < y^2$, mistä seuraa $x^2 < y^2$.

4. Pitääkö epäyhtälö $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ paikkansa kun $0 \le x < y$? Tässä saa suuruusjärjestustä koskevan tiedon lisäksi käyttää tietoa, että kun $0 \le a$, niin $\sqrt{a}$ on sellainen yksikäsitteinen epänegatiivinen luku, jonka neliö on a.

Ratkaisu: Väite pitää paikkansa. Oletetaan nimittäin vastoin väitettä, että joillakin x ja y pätisi $\sqrt{x} \ge \sqrt{y}$, vaikka $0 \le x < y$. Huomataan, että koska $y > 0$, niin $\sqrt{x} \ge \sqrt{y} > 0$, ja sovelletaan edellisen tehtävän tulosta. Jos $\sqrt{x} > \sqrt{y}$, niin suoraan tehtävän 3(d) nojalla olisi $x > y$, mikä on ristiriita. Jos toisaalta $\sqrt{x} = \sqrt{y}$, niin tietysti $(\sqrt{x})^2 = (\sqrt{y})^2$ eli $x = y$, mutta tämäkin on ristiriita sillä oletettiin että x on aidosti pienempi kuin y.

Toinen vaihtoehto olisi päätellä vaikkapa seuraavasti: Jos $\sqrt{x} \ge \sqrt{y}$, niin $\sqrt{x} - \sqrt{y} \ge 0$, mistä kertomalla molemmat puolet positiivisella luvulla $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ saadaan $(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 \ge 0$ ja edelleen $x - y \ge 0$ eli $x \ge y$ vastoin oletusta.

5. Etsi sellainen positiivinen reaaliluku k, että kaikilla $x > 1$ pätee epäyhtälö

$$0 < \frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} < k(x-1)$$

Vihje: Muokkaa erotusta $\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3}$ ja huomaa,että kahden positiivisen lausekkeen osamäärä kasvaa kun nimittäjää pienennetään.

Ratkaisu: Muokataan ensin tehtävässä esiintyvä kahden murtolausekkeen erotus toiseen muotoon.

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} = \frac{3(x+1) - 2(x+2)}{3(x+2)} = \frac{3x+3-2x-4}{3(x+2)} = \frac{x-1}{3x+6}$$

Koska oletuksen mukaan $x > 1$, niin lausekkeen $\frac{x-1}{3x+6}$ osoittaja sekä nimittäjä ovat molemmat positiivisia. (Tästä myös huomataan, että tehtävän vasemmanpuoleinen epäyhtälö pätee kaikilla $x > 1$.) Arvioidaan nyt lauseketta ylöspäin eli pienennetään nimittäjää, jolloin osamäärä kasvaa.

$$\frac{x-1}{3x+6} < \frac{x-1}{6},$$

sillä $3x + 6 > 6$ aina, kun $x > 1$. Näin ollen voidaan valita $k = \frac{1}{6}$, ja tämä on halutunlainen luku.

Tehtävässä riitti löytää yksi sellainen k, että epäyhtälö pätee. Sopivia k:n arvoja on kuitenkin olemassa paljon. Ensinnäkin, kun nyt tiedämme että $k = \frac{1}{6}$ toteuttaa epäyhtälön (jokaisella $x > 1$), niin myös mikä tahansa $k > \frac{1}{6}$ kelpaa, sillä tällöin

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{2}{3} = \frac{x-1}{3x+6} < \frac{1}{6}(x-1) < k(x-1).$$

Toisaalta myös lukua $\frac{1}{6}$ pienempiä, k:n paikalle sopivia positiivisia lukuja on olemassa. Arvioimalla lauseketta $3x + 6$ hieman toisella tavalla päädyttäisiin esimerkiksi k:n arvoon $\frac{1}{9}$ (joka taitaa jopa olla pienin mahdollinen k:n arvo, mutta tätä ei suinkaan tarvinnut tässä tehtävässä todistaa.)

6. Oletetaan, että $2 < x < 2 + 5^{-1000}$. Osoita, että $4 < x^2 < 4 + 5^{-999}$. Vihje: Huomaa, että oletus on yhtäpitävä tiedon $0 < x - 2 < 5^{-1000}$ kanssa ja väite tiedon $0 < x^2 - 4 < 5^{-999}$ kanssa. Esitä erotus $x^2 - 4$ tulona. Tehtävässä saa tietää, että $5^{-1000} < 1$.

Ratkaisu: Todetaan ensin, että väitteen vasemmanpuoleinen epäyhtälö pätee. Koska oletuksen mukaan $2 < x$, niin tehtävän 3 (d) nojalla pätee $4 < x^2$. Huomataan seuraavaksi, että väitteen oikeanpuoleinen epäyhtälö $x^2 < 4+5^{-999}$ on yhtäpitävä tiedon $x^2 - 4 < 5^{-999}$ kanssa. Esitetään lauseke $x^2 - 4$ tulona ja arvioidaan sitä ylöspäin.

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2) < (x+2) \cdot 5^{-1000},$$

koska oletuksen nojalla $x - 2 < 5^{-1000}$. Edelleen

$$(x+2) \cdot 5^{-1000} < (2 + 5^{-1000} + 2) \cdot 5^{-1000} = (4 + 5^{-1000}) \cdot 5^{-1000},$$

koska oletuksen mukaan $x < 2 + 5^{-1000}$, ja vielä

$$(4 + 5^{-1000}) \cdot 5^{-1000} < (4+1) \cdot 5^{-1000} = 5 \cdot 5^{-1000} = 5^{-999},$$

koska $5^{-1000} < 1$. On siis osoitettu, että $x^2 - 4 < 5^{-999}$ eli $x^2 < 4 + 5^{-999}$. Väitteen oikeanpuoleinenkin epäyhtälö siis pätee.