INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK
Analys I
Handledning 9
För veckan som börjar 23. 11. 2009

Egna frågor är fortsättningsvis det viktigaste att fundera på under föreläsningarna. Inga frågor är för dumma!

1. Vi antar att funktionen f är definierad (åtminstone) i intervallet $]y_0 - r, y_0 + r[$, att funktionen g är definierad åtminstone i intervallet $]x_0 - s, x_0 + s[$ och att $g(x) \in]y_0 - r, y_0 + r[$ för alla $x \in]x_0 - s, x_0 + s[$. Vi antar att f är kontinuerlig i y_0 och att g är kontinuerlig i x_0 samt att $g(x_0) = y_0$. Visa att $f \circ g$ är kontinuerlig i x_0.

2. Vi antar att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$ och deriverbar i intervallet $]1, 3[$. Vi antar dessutom att vi för alla $x \in]1, 3[$ har $1 \leq f'(x) \leq 2$. vad vet vi om värdet $f(3)$, om $f(1) = 0$? Hur kan du motivera ditt resultat utgående ifrån vad vi gått igenom under kursen?

3. Vi anter att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[1, 3]$ och deriverbar i intervallet $]1, 3[$. Vi anter dessutom att vi för alla $x \in]1, 3[$ har $1 \leq f'(x) \leq 2$. Vad vet vi om värdet $f(1)$, om $f(3) = 0$? Hur kan du motivera ditt resultat utgående ifrån vad vi gått igenom under kursen?

4. (Härledning av deriveringsregeln för produkt med hjälp av karakteriseringssatsen.) Vi antar att funktionerna f och g är deriverbara i punkten x. Då gäller enligt karakteriseringssatsen

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h)$$

och

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h),$$

där $\varepsilon_1(h) \to 0$ och $\varepsilon_2(h) \to 0$ när $h \to 0$. Modifiera produkten

$$(f(x) + f'(x)h + h\varepsilon_1(h))(g(x) + g'(x)h + h\varepsilon_2(h))$$

och utläs deriverbarheten av produkten fg i punkten x samt deriveringsregeln för en produkt.