MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Analyysi I
Ohjaus 6
2. 11. 2009 alkavalle viikolle RATKAISUT Erik Ramm-Schmidt

1. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 4.$$

Ratkaisu.
Funktion raja-arvon määritelmän nojalla tehtävämme on osoittaa seuraava: Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $\delta > 0$, että $|f(x) - f(5)| < \varepsilon$ aina kun $0 < |x - 2| < \delta$.

Kiinnitetään mielivaltainen $\varepsilon > 0$.

Lähdetään liikkeelle tutkimalla funktioarvon $3x^2 - 4x$ ja luvun 4 etäisyyttää. Koska olemme kiinnostuneita tästä etäisyydestä kun x on lähellä lukua 2 oletetaan alustavasti $|x - 2| < 1$. Nähdään, että

$$(1) \qquad |3x^2 - 4x - 4| = |(3x + 2)(x - 2)| = |3x + 2||x - 2|.$$

Arvioidaan lauseketta $|3x + 2|$ ylöspäin. Koska $|x - 2| < 1$, niin itseisarvolemman nojalla $-1 < x - 2 < 1$. Kerrotaan puolittain luvulla 3 ja saadaan $-3 < 3x - 6 < 3$ josta saadaan $5 < 3x + 2 < 11$ lisäämällä puolittain luvulla 8. Tästä seuraa $|3x + 2| < 11$ ja

$$(2) \qquad |3x + 2||x - 2| \leq 11|x - 2|$$

Tehdään yllä olevien valmistelujen perusteella valinta $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{11}, 1\}$. Osoitetaan, että tämä δ kelpaa:
Oletetaan $0 < |x - 2| < \delta$. Koska tällöin $|x - 2| < 1$ kohtien (1) ja (2) epäyhtälöt ovat voimassa ja

$$|3x^2 - 4x - 4| = |3x + 2||x - 2| \leq 11|x - 2| < 11\delta \leq 11 \cdot \frac{\varepsilon}{11} = \varepsilon.$$

$\square$

2. Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmän perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = 3x^2 - 4x$ on jatkuva kohdassa $x = 5$.
Ratkaisu.
Funktion jatkuvuuden määritelmän nojalla tehtävämme on osoittaa seuraava: Jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $\delta > 0$, että $|f(x) - f(5)| < \varepsilon$ aina kun $|x - 2| < \delta$.

Kiinnitetään mielivaltainen $\varepsilon > 0$.

Lasketaan ensin $f(5) = 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 = 55$. Lähdetään tutkimaan etäisyyttä $|f(x) - f(5)|$. Olemme kiinnostuneita tästä etäisyydestä kun x on lähellä lukua 5 joten oletetaan alustavasti $|x - 5| < 1$. Nähdään, että

$$|f(x) - f(5)| = |3x^2 - 4x - 55| = |(3x + 11)(x - 5)| \tag{1}$$

Arvioidaan lauseketta $|3x + 11|$ ylöspäin: Koska $|x - 5| < 1$, niin itseisarvolemman nojalla $-1 < x - 5 < 1$. Kerrotaan puolittain luvulla 3 ja saadaan $-3 < 3x - 15 < 3$ josta saadaan $23 < 3x + 11 < 29$ lisäämällä puolittain luvulla 26. Tästä seuraa $|3x + 11| < 29$ ja

$$|3x + 11||x - 5| \leq 29|x - 2| \tag{2}$$

Tehdään yllä olevien valmistelujen perusteella valinta $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{29}1\}$. Osoitetaan, että tämä δ kelpaa: Oletetaan $0 < |x - 5| < \delta$. Koska tällöin $|x - 5| < 1$ kohtien (1) ja (2) epäyhtälöt ovat voimassa ja

$$|f(x) - f(5)| = |3x^2 - 4x - 55| = |3x + 2||x - 2| \leq 29|x - 2| < 29\delta \leq 29 \cdot \frac{\varepsilon}{29} = \varepsilon.$$

□

3. Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmän perusteella, että funktio f jolle kaikilla x pätee $f(x) = 3x^2 - 4x$ on derivoituva kohdassa $x = 1$.

Ratkaisu. Funktion derivaatan määritelmän nojalla funktio f on derivoituva pisteessä $x = 1$ jos raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ on olemassa. Mikäli olemassa, tätä raja-arvoa merkitään $f'(1)$.

Tehtävämme on näin ollen osoittaa, että raja-arvo $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ on olemassa, käyttämällä raja-arvon määritelmää.

Kirjoitetaan erotusosamäärälauseke yksinkertaisempaan muotoon:

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{3(1+h)^2 - 4(1+h) - (3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1)}{h} \\
&= \frac{3(1 + 2h + h^2) - 4(1+h) - (-1)}{h} \\
&= \frac{3h^2 + 2h}{h} = 3h + 2.
\end{aligned}$$

Yllä olevan esityksen perusteella lähdetään todistamaan, että $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$:

Todistus. Kiinnitetään $\varepsilon > 0$. Tehdään valinta $\delta = \varepsilon/3$. Nähdään, että

$$\left|\frac{f(1+h) - f(1)}{h} - 2\right| = |3h + 2 - 2| = |3h| = 3|h| < 3\delta = \varepsilon$$

aina kun $0 < |h - 0| < \delta$

□

Olemme osoittaneet, että $f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$. Funktio f on näin ollen derivoituva pisteessä $x = 1$.

4. Osoita funktion raja-arvon määritelmän perusteella, että väite

$$\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 5$$

ei pidä paikkaansa. Älä siis vetoa tehtävään 1 ja raja-arvon yksikäsitteisyyteen.

Ratkaisu. *Me emme käytä tehtävän 1. ratkaisua suoraan, mutta palautetaan mieleen, että osoitettiin että todellinen raja-arvo on 4. Tämä tarkoittaa sitä, että etäisyys $|3x^2 - 4x - 4|$ saadaan pieneksi, kunhan x on tarpeeksi lähellä lukua 2. Me pyrimme tästä johtamaan ristiriidan.*

Tehdään vastaoletus: Pätee $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 5$.

Emme käytä vastaoletusta heti, vaan tutkitaan ensin funktion arvon etäisyyttä lukuun 5. Oletetaan alustavasti, että $|x - 2| < 1$.

$$\begin{aligned} |3x^2 - 4x - 5| &= |(3x^2 - 4x - 4) - 1| = |1 - (3x^2 - 4x - 4)| \\ &\geq |1| - |-(3x^2 - 4x - 4)| = 1 - |3x^2 - 4x - 4| \end{aligned}$$

Epäyhtälössä yllä käytettiin kolmioepäyhtälön ns. vasempaa puolta.

Nähdään kuten tehtävässä 1., että

$$|3x^2 - 4x - 4| = |3x + 2||x - 2|.$$

Arvioidaan termiä $|3x + 2|$ ylöspäin. Oletuksesta $|x - 2| < 1$ seuraa itseisarvolemman nojalla $-1 < x - 2 < 1$. Kerrotaan ensin epäyhtälö puolittain luvulla 3 ja lisäätään puolittain luku 8 ja saadaan $5 < 3x + 2 < 11$. Tästä seuraa $|3x + 2| < 11$ ja

$$|3x^2 - 4x - 4| = |3x + 2||x - 2| \leq 11|x - 2|.$$

Yhdistämällä yllä olevat epäyhtälöt saadaan

$$\text{(i)} \qquad |3x^2 - 4x - 5| \geq 1 - |3x^2 - 4x - 4| \geq 1 - 11|x - 2|.$$

Olemme valmiita johtamaan ristiriidan. Merkitään $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Vastaoletuksen mukaan pätee $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 5$, joten on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$|3x^2 - 4x - 5| < \varepsilon \text{ kun } 0 < |x - 2| < \delta.$$

Olkoon x luku jolle $0 < |x - 2| < \min\{\delta, \frac{1}{22}\}$ Koska tällöin pätee $0 < |x - 2| < \delta$ saadaan

$$|3x^2 - 4x - 5| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Toisaalta kohdasta (i) ja epäyhtälöstä $|x - 2| < \frac{1}{22}$ saadaan

$$|3x^2 - 4x - 5| \geq 1 - 11|x - 2| > 1 - 11 \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{2}.$$

Yhdistämällä yllä olevia epäyhtälöitä, saadaan

$$\frac{1}{2} > |3x^2 - 4x - 5| > \frac{1}{2}$$

mikä on ristiriita.

Näin ollen vastaoletus, eli väite väite $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 4x) = 5$ on epätosi.