Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava 2. kurssikoe 19.5.2011

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määritä euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ ensimmäisen suljetun neljänneksen

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$

sisus $int(A)$ ja reuna ∂A. Onko A lisäksi täydellinen? Oikea vastaus riittää!

2. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^5 + 1$, kun $x \in \mathbf{R}$. Pidetään tunnettuna, että se on bijektio. Onko se

(a) homeomorfismi, (b) bilipschitz-kuvaus joukossa $\mathbf{R}$?

Perustelut. Analyysistä tuttuja jatkuvia kuvauksia saa käyttää hyväksi.

3. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = \sin x, -\pi \leq x \leq \pi\}$$

ja sen ulkopuolella olevaa pistettä $z = (1, 1)$. Osoita, että löytyy sellainen piste $c = (a, b) \in A$, että $d(z, c) = d(z, A)$ (d euklidinen metriikka), siis pistettä z lähinnä oleva A:n piste.

Ohje. Kompaktiudella on tekemistä asian kanssa.

4. (a) Määrittele (lyhyesti) (jono)kompakti metrinen avaruus.

Tutki lisäksi, onko euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ osajoukko (pinta)

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^4 = 1\}$$

(b) kompakti, (c) yhtenäinen.

Ohje. Kohdassa (c) esitä pinta A kahden pinnan yhdisteenä.