Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava 1. kurssikoe 15.3.2011

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Tutki onko kuvaus $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$,

$$d(x,y) = |\ln x - \ln y|,$$

metriikka joukossa $X =]0, \infty[$. Funktion $x \mapsto \ln x$ perusominaisuudet katsotaan tunnetuiksi.

2. Osoita jatkuvaksi kuvaus $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, jossa

$$f(x,y,z) = (xyz, x+y+z), \quad \text{kun } (x,y,z) \in \mathbf{R}^3.$$

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva kuvaus. Määrää joukon

$$U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < f(x)\}$$

sulkeuma euklidisessa tasossa $\mathbf{R}^2$. Perustelut.

4. Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta $E = C([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}, \quad \text{kun } f \in E,$$

sen osajoukkoa

$$A = \{f \in E \mid f(1) = 1\}$$

ja kuvausta $\alpha : E \to \mathbf{R}$, jossa

$$\alpha(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx, \quad \text{kun } f \in E.$$

(a) Osoita että kuvaus α on Lipschitz (joukossa E).
(b) Nollafunktiolle $\mathbf{0} \in E$ pätee $e(\mathbf{0}, A) = 1$, jossa metriikka e on luonnollisesti normin $\| * \|_\infty$ määrittelemä. Mikä on kuvien euklidinen etäisyys $d\big(\alpha(\mathbf{0}), \alpha(A)\big)$ avaruudessa $\mathbf{R}$?