Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe 3.5.2011

Huom.1. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

Huom.2. Sanomattakin on selvää, että kaikkia luennoilla tai oppikirjassa esitettyjä lauseita saa käyttää, niitä uudestaan todistamatta.

1. Olkoon A avaruuden X osajoukko, joka on sekä avoin että suljettu X:ssä yhtä aikaa. Osoita, että tällöin pätee $\partial A = \emptyset$, siis sen reuna on tyhjä.

2. Tarkastellaan kuvausta $f : [-1,1] \to [-2,2]$, $f(x) = x^3 + x$, kun $x \in [-1,1]$. Pidetään tunnettuna, että se on bijektio. Onko se homeomorfismi? Perustelut.

3. (a) Määrittele (lyhyesti) metrisen avaruuden (X,d) täydellisyys.

Tarkastellaan lisäksi kuvausta $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,x^2-y)$, ja sen kuvajoukkoa $A = f\mathbf{R}^2$. Osoita, että avaruus (joukko) A on

(b) yhtenäinen, (c) täydellinen.

Ohje. Kohdassa (c) esitä A uudella tapaa.

4. Olkoot A ja B euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^n$ epätyhjiä osajoukkoja, A kompakti ja B suljettu $\mathbf{R}^n$:ssä. Osoita, että löytyy sellaiset pisteet $a \in A$ ja $b \in B$, että $d(a,b) = d(A,B)$ (jossa d on euklidinen metriikka).

Ohje. Mitkä ovat $\mathbf{R}^n$:n kompaktit osajoukot?