Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
1. kurssikoe 1.3.2011

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Tutki onko kuvaus

$$d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^2 - y_2^2|, \quad \text{jossa } x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

metriikka joukossa $X = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 > 0\}$.

2. (a) Osoita jatkuvaksi kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, jossa

$$f(x,y) = xy + e^y, \quad \text{kun } (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

(b) Pidetään tunnettuna, että kuvaus $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on muualla jatkuva paitsi pisteessä $\mathbf{0} = (0,0)$. Näillä tiedoilla, missä pisteissä kuvaus $h = (f,g) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ on jatkuva? Siis h:n komponentit ovat a-kohdan f ja g. Aivan lyhyt vastaus riittää.

3. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jatkuva kuvaus. Osoita että $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < f(x)\}$ on euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ avoin joukko.

4. Tarkastellaan rajoitettujen funktioiden avaruutta $E = raj([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}, \quad \text{kun } f \in E,$$

sen osajoukkoa

$$A = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \text{ on jatkuva ja } f(1) = 1\}$$

ja sen vektoria, kuvausta $g : [0,1] \to \mathbf{R}$, jolla

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{kun } x = 1. \end{cases}$$

(a) Määrää joukon A läpimitta $d(A)$.
(b) Määrää etäisyys $d(g, A)$.
(c) Kuuluuko g joukon A sulkeumaan E:ssä?
Metriikka d on luonnollisesti normin $\| * \|_\infty$ määrittelemä.