

**Topologia I**  
Harjoitus 9, kevät 2011

1. Olkoon  $(f_n)$  jono jatkuvia funktioita  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , joka suppenee välillä  $[a, b]$  tasaisesti kohti funktiota  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Osoita, että tällöin

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

Päteekö vastaava tulos derivaatoille? Lyhyt vastaus.

2. (12:4, osa) Olkoon  $(X, d)$  täydellinen metrinen avaruus ja  $(x_n)$  sellainen jono  $X$ :ssä, että  $d(x_n, x_{n+1}) \leq 10 \cdot 2^{-n}$  kaikilla  $n \in \mathbf{N}$ . Osoita, että jono suppenee kohti jotakin pistettä  $a \in X$ .

3. (12:6, muunnos) Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta  $E = C([0, 1], \mathbf{R})$  varustettuna supnormilla  $\| * \|_\infty$ .

(a) Osoita, että normiavarouden  $(E, \| * \|_\infty)$  Cauchy-jono  $(f_n)$  suppenee pisteittäin välin  $[0, 1]$  pisteissä kohti erästä funktiota  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ .

(b) Osoita, että suppeneminen  $f_n \rightarrow f$  on tasaista välillä  $[0, 1]$ .

(c) Osoita edellisiin kohtiin ja lauseeseen 11.24 nojaten, että normiavaruus  $(E, \| * \|_\infty)$  on täydellinen.

Ohje. (b) Olkoon  $\epsilon > 0$ . Valitse sellainen  $n_\epsilon$ , että  $\|f_k - f_n\|_\infty < \epsilon/2$ , kun  $k, n \geq n_\epsilon$ , ja anna  $n$ :n mennä äärettömään.

4. (12:11) Olkoon  $X$  täydellinen ja  $f : X \rightarrow Y$  bilipschitz. Osoita, että kuva-joukko  $fX$  on täydellinen ja siis suljettu  $Y$ :ssä.

5. (12:14) Olkoon  $(E, \| * \|)$  täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, ja olkoon  $f : E \rightarrow E$  kontraktio. Osoita, että yhtälö  $F(x) = x + f(x)$  määrittelee homeomorfismin  $F : E \rightarrow E$ , joka on bilipschitz.

Ohje. Kiinnitetään  $y \in E$  ja merkitään  $g_y(x) = y - f(x)$ . Osoita, että kuvauksella  $g_y : E \rightarrow E$  on täsmälleen yksi kiintopiste  $G(y)$ , jolloin saadaan kuvaus  $G : E \rightarrow E$ ,  $y \mapsto G(y)$ . Osoita, että  $F \circ G = G \circ F = id_E$ , ja että  $F$  on bilipschitz. Kiinnitä erityistä huomiota epäyhtälöketjun puoleen  $m\|x - z\| \leq \|F(x) - F(z)\|$ , kaikilla  $x, z \in E$ , missä  $m > 0$ .

6. (13:12, muunnos) Osoita, että jos diskreetti topologinen avaruus on kompakti, niin se on joukkona äärellinen.

Ohje. Vastaoletus, sopiva jono ja sen kasautumisarvot.