Topologia I

Harjoitus 8, kevät 2011

1. Olkoon $X =]0,\infty[$, d euklidinen metriikka siinä ja $e(x,y) = |1/x - 1/y|$, kun $x, y \in X$. Osoita että

(a) kuvaus e on metriikka X:ssä, (b) $d \sim e$, (c) metriikat d ja e eivät ole bilipschitz-ekvivalentit.

Ohje. (a) Esitä e bijektion $f : X \to X$, $f(x) = 1/x$, avulla. Pätee $f^{-1} = f$.

(b) Pätee $id : (X,d) \to (X,e) = \big(f^{-1} : (X,d) \to (X,e)\big) \circ \big(f : (X,d) \to (X,d)\big)$, jossa f^{-1} on isometria.

(c) Muodosta d-rajoitettu joukko $A \subset X$, joka ei ole e-rajoitettu.

2. Tutki, suppenevatko seuraavat $\mathbf{R}^2$:n jonot (x_k). Myönteisessä tapauksessa anna jonon raja-arvo. Kielteisessä tapauksessa tutki, onko jonolla edes yhtä suppenevaa osajonoa (ja siten kasautumisarvoa). Lyhyt esitys riittää.

(a) $x_k = \big(e^{-k}, (1/2)^k\big)$, (b) $x_k = (2^k, 1^k)$, (c) $x_k = \big(k^{-1/2}, (-1)^k\big)$.

3. (a) (11:2) Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$, ja (x_k) jono A:ssa (siis $x_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$). Osoita, että jonon kasautumisarvot kuuluvat sulkeumaan $\bar{A}$.

(b) (11:9) Olkoon (x_k) jono avaruudessa X. Osoita, että jonon kasautumisarvojen joukko on suljettu X:ssä.

Ohje. (b) Tarkastele kyseisen joukon sulkeuman pistettä.

4. Olkoot (x_k) ja (y_k) reaalilukujonoja, joilla $x_k \to 3\pi/4$ ja $y_k \to \sqrt{\pi}/2$. Merkitään $w_k = \sin(x_k - y_k^2)$. Osoita tarkasti, että $w_k \to 1 = \sin(\pi/2)$.

Ohje. Käytä funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \sin(x - y^2)$, jonojatkuvuutta (lause 11.8), ja merkitse $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2$.

5. (11:12, oleellisesti) Oletetaan, että kuvausten $f_n : X \to Y$ jono suppenee pisteittäin kohti kuvausta $f : X \to Y$, ja että kuvaukset f_n ovat M-bilipschitzejä (samalla M). Osoita, että myös f on M-bilipschitz.

Ohje. Lauseesta 11.12 on hyötyä.

Huom. Erona jatkuvuuteen, Lipschitz- tai bilipschitz-ominaisuus säilyy rajalla, vaikka suppeneminen on vain pisteittäistä. Mutta siihen vaaditaan kaikilla n sama vakio M (mikä on paljon vaadittu).

6. (11:10, osa) Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funktio, jossa $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbf{R}$. Tutki, suppeneeko funktiojono (f_n)

(a) pisteittäin $\mathbf{R}$:ssä, (b) tasaisesti $\mathbf{R}$:ssä.