Topologia I
Harjoitus 7, kevät 2011

1. Onko funktio $f : [0, 100] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, (a) Libschitz-kuvaus, (b) bilibschitz-kuvaus, (c) upotus?

2. (9:5) Konstruoi jokin homeomorfismi $f : B^2 \approx \mathbf{R}^2$, jossa $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ on tason avoin yksikkökiekko. Todistuksen voit vaihteeksi sivuuttaa. Löydätkö kuitenkin käänteiskuvauksen?

Ohje. Tarkastele vastavaa tilannetta $\mathbf{R}$:ssä (geometrisesti tai käytä funktiota $\tan : [0, \pi/2[\to [0, \infty[$).

3. Tarkastellaan $\mathbf{R}^3$:n pintaa $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sin x + \cos y\}$ varustettuna euklidisella metriikalla. Pidetään tunnettuna, että kuvaus

$$f : A \to \mathbf{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x, y) \quad \text{kun } (x, y, z) \in A,$$

on bijektio. Osoita, että se on homeomorfismi ja siten $A \approx \mathbf{R}^2$. Tehtävässä pidetään tunnettuna, että kuvaukset $\sin, \cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia.

4. Olkoon $x \in X$ ja $\emptyset \neq A \subset X$. Osoita, että $d(x, A) > 0$ on topologinen ominaisuus.

Ohje. Oleta homeomorfismi $f : (X, d) \approx (Y, e)$ ja osoita, että $e(f(x), f(A)) > 0$. Sulkeuma!

Huom. On syytä olla varovainen sen suhteen, mikä on tai ei topologinen ominaisuus. Esimerkiksi ominaisuus $d(A, B) > 0$ ei ole.

5. Tarkastellaan jatkuvien funktioden avaruutta $E = C([0, 1], \mathbf{R})$. Olkoot d ja e siinä metriikat, jotka normit $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ ja $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, kun $f \in E$, luovat. Osoita että $\tau_e \subset \tau_d$. Päteekö topologioiden inkluusio toisin päin? Kummin päin identtinen kuvaus on jatkuva? Ovatko metriikat ekvivalentit?