Topologia I

Harjoitus 6, kevät 2011 (viikko 11)

1. Olkoon kuvaus $f : [-1,2] \to \mathbf{R}$ määritelty yhtälöllä

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{kun} \quad -1 \le x \le 0, \\ -2x^2+x+1, & \text{kun} \quad 0 < x \le 1, \\ x^3 - x, & \text{kun} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Osoita että se on jatrkuva.

Ohje. Sopivat luvun 7 lauseet.

2. Anna joukkojen

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \ge 1\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 1\}$$

sisä-, ulko- ja reunapisteet avaruudessa $\mathbf{R}^2$. Matemaattinen perustelu.

Ohje. Ehkä ensin joukon ja sen komplementin sulkeumat.

3. (8:2, 8:3) Olkoon

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \ge 0,\ x \ge 0,\ |y| < 1\}.$$

Määritä joukot $intA$, ∂A ja $\bar{A}$ avaruudessa

$$(a)\ X = \mathbf{R}^2, \quad (b)\ Y = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \ge 0\}.$$

Yksityiskohtaista matemaattista perustelua ei tarvita, vaan voit ratkaisussasi nojautua sopiviin kuviin.

4. (7:7) Olkoon $A, B \subset X$ ja $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Osoita, että A ja B ovat avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa $A \cup B$, tämä varustettuna luonnollisesti X:stä periytyvällä indusoidulla metriikalla. Täytyykö niiden olla avoimia tai suljettuja joukkoja avaruudessa X?

5. Olkoon $a \in \mathbf{R}$ vakio, ja olkoot välit $X = [a, \infty[$ ja $Y =]-\infty, a]$ tavallisella euklidisella metriikalla varustetut. Konstruoi jokin homeomorfismi $f : X \approx Y$. Perustele homeomorfisuus.

6. Vaikeana kahden pinnan tehtävä: (8:7 b) Olkoot A ja B avaruuden X suljettuja joukkoja, joilla pätee $intA = intB = \emptyset$. Osoita että tällöin pätee myös $int(A \cup B) = \emptyset$.

Huom. Korvaava ensimmäinen kurssikoe on ti 15.3. klo 12-14 salissa C124. Sen alue on Väisälän luvut 0-7. Kokeissahan saa olla mukana yhden A4-arkin kokoinen tiivistelmä.