

Topologia I
Harjoitus 5, kevät 2011

1. (5:7) Olkoon E normiavaruus, $I = [0, 1]$, ja kuvaukset $f, g : I \rightarrow E$ olkoot jatkuvia. Osoita, että yhtälön $h(s, t) = (1 - t)f(s) + tg(s)$ määrittelemä kuvaus $h : I^2 \rightarrow E$ on jatkuva, missä I^2 on neliö $I \times I \subset \mathbf{R}^2$.

2. Tutki, ovatko seuraavat tason \mathbf{R}^2 osajoukot suljettuja:

$$(a) \quad A_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1/k \leq |(x, y)| \leq 1\}, \text{ jossa } k \in \mathbf{N}, \quad (b) \quad A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k.$$

Jos ei, niin määrää sulkeuma. Ohje. Sulkeumaksi osoittamisessa on hyötyä lauseen 6.8 kohdasta (4).

3. Onko \mathbf{R}^2 :n osajoukko $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y = \sin(1/x)\}$ suljettu, ja jos ei, niin mikä on sen sulkeuma \bar{A} ? Mitkä pisteet ovat kasautumispisteitä? Todistusta ei tässä haeta, lyhyt vastaus riittää.

Ohje. Hahmottele kuva. Huomioi pisteet $(x_k, y_k) \in A$, joissa $x_k = 1/(\pi/2 + k\pi)$ ja $k \in \mathbf{N}$ on parillinen tai pariton. Bolzanon lause.

4. (6:12) Olkoot $f, g : X \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia ja $A \subset X$ sellainen joukko, että $f|_A = g|_A$. Osoita, että $f|\bar{A} = g|\bar{A}$.

5. (6:18) Osoita, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ voidaan lausua leikkauksena laskevasta jonosta avoimia joukkoja $U_1 \supset U_2 \supset \dots$.

Ohje. Käytä sopivia r -ympäristöjä, kts. 4.10.

6. (7:2) Tutki seuraavista joukoista $A \subset \bar{B}^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, mitkä niistä ovat avoimia avaruudessa \bar{B}^2 :

$$(a) \quad A = \{(x, y) \in \bar{B}^2 \mid xy > 0\}, \quad (b) \quad A = \{(x, y) \in \bar{B}^2 \mid x \geq 0\}.$$

7. (7:3 osa) Muodosta seuraavien joukkojen $A \subset B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sulkeumat avaruudessa B^2 :

$$(a) \quad A = \{(x, 0) \in B^2 \mid -1 < x < 1\}, \quad (b) \quad A = \{(x, y) \in B^2 \mid x + y > 0\}.$$

Mitkä A :t ovat suljettuja B^2 :ssa?

Huom. Ensimmäisen kurssikokeen 1.3. alue, samoin korvaavan 15.3., on Väisälän luvut 0-7. Kokeissahan saa olla mukana yhden A4-arkin kokoinen tiivistelmä.