Topologia I
Harjoitus 4, kevät 2011

1. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoja

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = e^{-10x}\} \quad \text{ja} \quad B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \cos(xy) > x^2 - 2y^2\}.$$

Osoita että A ei ole, mutta B on avoin joukko.

Ohje. Muista jälkimmäisessä jatkuvat kuvaukset.

2. (4:4) Olkoon $E = C([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Jokaista $f \in E$ kohti yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0,1]$$

määrittelee kuvauksen $\alpha(f) : [0,1] \to \mathbf{R}$. Pidetään tunnettuna että $\alpha(f) \in E$; siten saadaan kuvaus $\alpha : E \to E$, $f \mapsto \alpha(f)$. Todista, että α on jatkuva. Onko se peräti Lipschitz?

3. (4:11) Olkoon $f : [-10, 5] \to \mathbf{R}$ funktio $f(x) = 5x^2 + 6x + 7$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen M, että f on M-Lipschitz.

4. (4:2) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, joka ei ole Lipschitz. Perustele.

5. (4:8) Olkoon

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x,y) \neq \mathbf{0}.$$

Osoita, että näin määritelty funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on epäjatkuva origossa mutta että f:n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa. Lyhyeen kysymykseen lyhyt vastaus, onko $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ jatkuva muualla?

6. Olkoon $(E, |*|)$ normiavaruus, $I = [0,1]$, ja olkoot x ja y kaksi kiinnitettyä E:n pistettä. Yhtälö

$$h(t) = (1-t)x + ty, \quad \text{kun } t \in [0,1],$$

määrittelee kuvauksen $h : [0,1] \to E$, joka piirtää pisteitä x ja y yhdistävän janan E:ssä. Osoita että h on jatkuva.