Topologia I

Harjoitus 2, kevät 2011

1. (Noin 1:9) Olkoon $E = C([0,1])$. Tutki, mitkä normin ehdoista (N1), (N2) ja (N3) ovat voimassa, kun asetetaan $\|x\| = |\int_0^1 x(t)\,dt)|$, $x \in E$.

2. (1:7, osa) Tarkastellaan $\mathbf{R}^n$:n normeja $|x|$ = tavallinen normi, $|x|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ ja $|x|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Osoita, että

(a) $|x|_\infty \le |x| \le |x|_1 \le n|x|_\infty$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

(b) $|x|_1 \le \sqrt{n}|x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

Ohje. Kohdan (a) keskimmäisessä epäyhtälössä kirjoita $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ja sovella kolmioepäyhtälöä. (b):ssä sovella Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ ja $(1, \cdots, 1)$.

3. Tutki onko kuvaus

$$d(x,y) = |x_1^3 - y_1^3| + |x_2^3 - y_2^3|, \quad x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),$$

metriikka joukossa $\mathbf{R}^2$.

4. Määritä tason $\mathbf{R}^2$ pallo $S(a, 6)$, kun $a = (-1, 2)$ ja metriikkana on $d(x,y) = 3|x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$, jossa $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Ei tarvitse osoittaa, että kyseessä on todella metriikka, mutta voihan sen tehdäkin. (Kuinka helpoiten?)

5. (1:10) Osoita, että yhtälö $\|x\| = \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\}$ määrittelee normin tasossa $\mathbf{R}^2$. Piirrä yksikköpallo $S = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

6. (2:13) Olkoon $E = raj([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla. Määritä sen osajoukkojen $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f \textit{ on vakiofunktio}\}$ välinen etäisyys $d(A, B)$.