Topologia I

Harjoitus 11, viikot 16 ja 17, kevät 2011

1. (14:12, muunnos) Tarkastellaan tason $\mathbf{R}^2$ joukkoa $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.
(a) Onko E yhtenäinen? (b) Onko sulkeuma $\bar{E}$ yhtenäinen?
Ohje. (b) Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Hainnollista kuvalla.

2. Tarkastellaan harjoituksen 10 tehtävässä 1 esiintyviä $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja
$A_1 = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, $A_3 = \{(x, y) \mid x^2 + 3y^2 < 4\}$.
Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbf{R}^2$:n alueita?
Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 1.

3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $I = [0, 1]$. Olkoot $\alpha : I \to X$ ja $\beta : I \to X$ sen polkuja, joilla $\alpha(1) = \beta(0)$, siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi α:n ja β:n avulla X:n polut $\gamma : I \to X$ ja $\eta : I \to X$, joilla $\gamma(I) = \eta(I) = \alpha(I) \cup \beta(I)$ (eivät eksy edellisiltä), $\gamma(0) = \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$ sekä $\eta(0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(0)$. Voi sanoa, että γ kulkee α:n ja β:n peräkkäin, ja η taas tekee sen käänteisessä järjestyksessä.
Ohje. Paloittain määrittely.

4. (14:4) Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $X = A \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Olkoon $f : X \to \mathbf{R}^2$ jatkuva kuvaus, jolla $f(x, 0) = (0, 0)$ kaikilla $x \in A$. Todista, että kuvajoukko fX on yhtenäinen.
Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0, 1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12 tai polkuyhtenäisyys.

5. (14:9) Osoita, että $\mathbf{R}^3$:n osajoukko $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + \cos y - e^y \sin z = 1\}$ on yhtenäinen.
Ohje. Lause 14.16, kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, jolla $Imf = A$.

6. (14:8, muunnelma) Olkoon G metrisen avaruuden (X, d) alue. Olkoot joukot $A, B \subset \partial G$ ($=G$:n reuna) suljettuja, epätyhjiä ja erillisiä. Osoita, että on olemassa sellainen piste $x \in G$, että $d(x, A) = d(x, B)$.
Ohje. Tarkastele jatkuvaa kuvausta $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$, lause 14.19. Erillisyyttä muuten voidaan tässä väljentää: kunhan $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$, mutta ei tämän enempää.

Huom. Toisen kurssikokeen 3.5. (13-15 Exactumin auditorio) alue on Väisälän luvut 8-14 pois lukien asiat tuloavaruus ja komponentit.