Topologia I
Harjoitus 10, kevät 2011

1. (13:3) Tutki $\mathbf{R}^2$:n joukoista A_k, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä, kun

$$A_1 = \{(x,y) \,|\, x^2 + 3y^2 \le 4\}, \; A_2 = \{(x,y) \,|\, xy = 1\}, \; A_3 = \{(x,y) \,|\, x^2 + 3y^2 < 4\}.$$

2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason $\mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita, että löytyy sellainen piste $(a,b) \in A$ (ainakin yksi), että $x + 2y \le a + 2b$ kaikilla $(x,y) \in A$.

Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta. Piirrä havainnekuva.

3. (13:21) Olkoon kuvaus $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jatkuva, ja olkoon se tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbf{R}^n \setminus B^n$ (B^n avoin yksikkökuula). Osoita, että f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbf{R}^n$:ssä. Huom. Kuvauksen maalina voisi olla mikä tahansa metrinen avaruus.

4. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X,d) osajoukko, josta lötyy sellainen jono (x_n), että $d(x_k, x_n) \ge r$ kaikilla $k \neq n$. Osoita, että A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioden avaruus $E = C([0,1], \mathbf{R})$ supnormilla $\|{*}\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0,1]\}$ kun $f \in E$. Osoita a-kohtaa hyväksi käyttäen, että suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E \,:\, \|f\|_\infty \le 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se tunnetusti on suljettu ja rajoitettu joukko E:ssä.

Ohje. (b) Jono paloittain määriteltyjä (yksinkertaisia) funktiota $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$.

5. (13:4, muunnos) Olkoon avaruus (X,d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita jonon avulla, että leikkaus $\cap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

(b) Osoita, että jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö.

(c) Päteekö a-kohta, jos oletus kompaktiudesta pudotetaan pois?

Ohje. (a) Aloita valitsemalla pisteet $x_n \in A_n$. (c) Valitse $X = \mathbf{R}$.

6. (Vrt. edellinen) Olkoon avaruus (X,d) kompakti, ja olkoon $\{A_t \,|\, t \in \mathbf{R}_+\}$ laskeva, ylinumeroituva joukkoperhe sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja, siis $A_s \supset A_t$, kun $s, t \in \mathbf{R}_+$ ja $s < t$. Osoita, että leikkaus $\cap_{t\in\mathbf{R}_+} A_t$ on epätyhjä ja kompakti.

Ohje. Vastaoletus ja sopiva (ylinumeroituva) avoin peite X:lle, lause 13.39.