Topologia I
Harjoitus 1, kevät 2011

1. Mitkä seuraavista väittämistä ovat aina totta? Yhden sanan vastaus riittää. $A, B, X, Y, \cdots$ joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus.

$$
\begin{array}{llll}
(a) & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), & (b) & f^{-1} \cup_{i \in I} B_i = \cup_{i \in I} f^{-1} B_i, \\
(c) & f \cap_{i \in I} A_i = \cap_{i \in I} f A_i, & (d) & f f^{-1} B = B, \quad \text{kun } f \text{ on surjektio.}
\end{array}
$$

2. Olkoot $x = (3, -1, 1)$ ja $y = (1, -2, -1)$ euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreita sekä $a = -2$. Määritä
(a) $a(x - y)$, (b) $a|x - y|$, (c) $|a|(|x| - |y|)$, (d) $a(x \cdot y)$, (e) $|a||x||y|$, (f) $x \cdot ay$, kun käytetään tavallista pistetuloa ja sen määrittelemää tavallista normia.

3. Olkoon E vektoriavaruus, ja olkoot $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ sekä $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ sen kaksi sisätuloa. Onko myös kuvaus

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{R}, \quad \langle x, y \rangle = 3\langle x, y \rangle_1 + 2\langle x, y \rangle_2,$$

sen sisätulo?

4. (Väisälä 1:4) Olkoon E sisätuloavaruus ja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sen sisätulo. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on joukko

$$A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita, että joukko $A^\perp$ on E:n vektorialiavaruus.

5. (Väisälä 1:6, osa) Olkoon E sisätuloavaruus ja $x, y \in E$. Todista nk. suunnikassääntö

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$