Topo I, kevään 2011 luentopäiväkirja

April 28, 2011

Tähän luentopäiväkirjaan kirjataan *jälkikäteen* lyhyesti kullakin luennolla käsitellyt asiat ja vastaava kohta kirjassa Jussi Väisälä: Topologia I, 3. painos 2004. Tässä tekstissä tehdään myös ajankohtaisia, kurssia koskevia ilmoituksia.

17.1. Johdanto: Minkälaisia kysymyksiä topologiassa yleisesti ottaen tutkitaan.
Kirjan luku 1, s. 14: Vektoriavaruus, postulaatit.

19.1. s. 14-16: Aliavaruus, $\mathbb{R}^n$, funktioavaruuksia, sisätulo, -postulaatit, sisätulon luoma normi, $\mathbb{R}^n$:n pistetulo, standardikanta.

20.1. Kertausta: reaalilukujoukon supremum. Perusominaisuuksia.
s. 16-17: Sisätuloavaruudet l_2 ja $C([a, b])$ varustettuina edellinen pistetulolla ja jälkimmäinen integraalisisätulolla. Schwarzin epäyhtälö ja lause 1.5.

24.1. Kirjan sivut 17-19: Normiavaruus, -postulaatit, esimerkkejä kuten supnormi rajoitettujen funktioiden avaruudessa, $\mathbb{R}^n$:n normeja, l_p- ja L_p-normit.
Luku 2, sivu 21: Metrinen avaruus, metriikkapostulaatit, lause 2.2.

26.1. Luku 2, sivut 21-24: $\mathbb{R}^n$:n euklidinen metriikka, esimerkkejä eri metriikoista, erityisesti $\{0, 1\}$-metriikka, osajoukon metriikka.
Metrisen avaruuden kuulat ja pallot, esimerkkejä niistä, osajoukon pallot ja kuulat.
Joukkojen välinen etäisyys, määritelmä.

27.1. Luku 2, s. 24-26: Pisteen etäisyys joukosta, lause 2.10.
Joukon läpimitta, rajoitettu joukko, rajoitettu kuvaus, lauseet 2.12, 2.14 ja 2.15.

31.1. Luku 2, s. 26 ja 28: Rajoitettujen kuvausten joukon supmetriikka, Kuratowskin upotuslause.
Luku 3, s. 29-31: Avoimen joukon määritelmä, yksinkertaisia esimerkkejä, lauseet 3.2, 3.4, 3.5, 3.7 ja 3.9. Metrisen avaruuden (X, d) topologia ja ympäristöt topologisessa avaruudessa.

2.2. Luku 3, s. 31-33: Lauseet 3.10 ja 3.11. Erakkopiste, diskreetti joukko.
Luku 4, s. 35-36: Jatkuvuuden määritelmä, erityisesti kuulaympäristöjen avulla. Esimerkkejä.

3.2. Lulu 4, s. 36-38: Lipschitz-kuvaus. Lauseet 4.5, 4.7 ja 4.8. Sovellus 4.6: kuvaus "pisteen etäisyys joukosta". Esimerkkejä (joukon avoimeksi osoittaminen lauseen 4.8 avulla).

7.2. Luku 4, s. 38-39: Esimerkki L-jatkuvuudesta, joukon r-pullistumat, lauseet 4.11, 412 ja 4.13.

Luku 5, s. 41-42: Summa- ja tulokuvaukset. Lauseet 5.2 ja 5.3.

9.2. Luku 5, s. 42-44: Avaruuden $\mathbb{R}^n$ projektiot, vektoriarvoisen kuvauksen $f : X \to \mathbb{R}^n$ komponenttikuvaukset. Lauseet 5.6 ja 5.9. Esimerkkejä.

10.2. Luku 6, s. 46-48: Suljettu joukko ja mielivaltaisen joukon sulkeuma, määritelmät. Esimerkkejä. Lauseet 6.3, 6.4, 6.6 ja 6.8 (viimeisen todistus jäi kesken).

14.2. Luku 6, s. 48-50: Lauseet 6.8, 6.10, 6.11, 6.12 ja 6.13. Pari esimerkkiä (suljetun joukon suoran kuvan ei tarvitse olla suljettu jatkuvassakaan kuvauksessa).

16.2. Luku 6, s. 50-52: Lauseet 6.15, 6.17 ja 6.18 (Urysohnin lemma). Viimeksi mainittu antaa erityisesti riittävän ehdon, että erillisillä osajoukoilla on erilliset ympäristöt. Esimerkki tästä.

Kasautumispiste, esimerkkejä, lauseet 6.21 ja 6.22.

17.2. Luku 7, s. 54-56: Relatiivitopologian määritelmä. Lauseet 7.2, 7.4, 7.6, 7.7 ja 7.9. Esimerkkejä.

Rajoittumakuvauksen esittäminen inkluusiokuvauksen avulla: $f : X \to Y$, $A \subset X$. Tällöin $f|A = f \circ j$, jossa $j : A \to X$ on inkluusio.

21.2. Luku 7, s. 56-57: Lauseet 7.11, 7.13 ja 7.17; lauseesta 7.13 esitettiin myös vastaava tulos, kun avaruus X on mielivaltainen yhdiste sen **avoimista** joukoista U_j: $X = \cup_{j \in J} U_j$. Siis jos rajoittumat $f|U_j$ ovat jatkuvia, niin myös f on jatkuva.

Luku 8, s. 59: Osajoukon $A \subset X$ sisä-, ulko- ja reunapisteet, määritelmät.

23.2. Luku 8, s. 59-61: Lause 8.3, esimerkkejä reunasta, sisuksesta ja ulkopisteistöstä.

24.2. Luku 9, s. 62-63: Homeomorfismin määritelmä, esimerkkejä homeomorfismeista. Apulause, jonka mukaan (molemminpuolinen) käänteiskuvaus on yhtäpitävää bijektiivisyyden kanssa.

– Perioditauko –

14.3. Luku 9, s. 63-66: Homeomorfismi kertauksena, upotus. Esimerkkejä upotuksista, erityisesti Brouwerin alueensäilymislause (ilman todistusta): Olkoon joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ *avoin* ja kuvaus $f : U \to \mathbb{R}^n$ jatkuva injektio. Tällöin myös kuvajoukko fU on avoin $\mathbb{R}^n$:ssä, ja kuvaus f on upotus.

Lauseet 9.7 ja 9.8 sekä homeomorfialuokat. Esimerkkejä keskenään homeomorfisista avaruuksista ja niistä, jotka eivät ole, erityisesti homeomorfialuokat kaari ja Jordan-käyrä.

16.3. Luku 9, s. 66-68: Topologiset ja metriset ominaisuudet, esimerkkejä. Bilipschitz-kuvaus ja isometria, esimerkkejä. Lauseet 9.13, 9.15 (=topologisen ominaisuuden määritelmä) ja 9.19.

Luku 10, s. 71: Metriikkojen, samoin normien, ekvivalenssin määritelmä. Lause 10.2.

17.3. Luku 10, s. 71-72: Bilipschitz-ekvivalenssi. Lauseet 10.4, 10.6 ja 10.7. Esimerkkejä ekvivalenteista ja bilipschitz-ekvivalenteista metriikoista sekä normeista.

Huom. Tuloavaruus, s. 72-76, jätetään tässä kurssissa väliin.

Luku 11, s. 78: Jono, sen suppeneminen ja raja-arvo (määritelmät). Jokunen esimerkki.

21.3. Luku 11, s. 78-82: Lauseet 11.3, 11.4, 11.6, 11.7, 11.8, 11.11, 11.12 ja 11.13. Esimerkkejä.

Jonojen kasautumisarvot ja osajonot, määritelmät.

23.3. Luku 11, s. 82-85: Lauseet 11.17, 11.18 ja 11.19.

Funktiojonon suppeneminen pisteittäin ja toisaalta tasaisesti jossain joukossa. Lauseet 11.21 ja 11.24. Esimerkkejä.

24.3. Luku 11, s. 85 ja 87-88: Funktion raja-arvo pitkin tiettyä joukkoa. Väisälän sivujen 86-87 lauseet sivuutettiin ja osa sisällöstä koottiin pariin peruslauseeseen.

Jatkuvan kuvauksen $f : A \to Y$ jatkuva jatke $g : B \to Y$ joukkoon $B \subset \bar{A}$, lause 11.33.

28.3. Luku 12, s. 90-92: Cauchyn jonon ja täydellisen avaruuden määritelmät, esimerkki Cauchyn jonosta, joka ei suppene. Lauseet 12.2, 12.3, 12.5 ja 12.6.

Kontraktio eli kutistus, kuvauksen $f : X \to X$ kiintopiste. Lause 12.8 (Banachin kiintopistelause).

30.3. Luku 12, s. 92-94: Esimerkkejä Banachin ja Brouwerin kiintopistelauseista.

Tasainen jatkuvuus, lauseet 12.12 ja 12.14. Esimerkkejä.

31.3. luku 12, s. 94: Lause 12.15, esimerkki.

Luku 13, s. 97-98: Kompaktiuden (jonokompaktiuden) määritelmä, esimerkkejä. Lauseet 13.3, 13.4 ja 13.6.

4.4. Luku 13, s. 98-101: Lauseet 13.7, 13.8, 13.11, 13.13, 13.14, 13.17 (Bolzano-Weierstrass), 13.18, 13.19, 13.21 (Heine-Borel) ja 13.22. Esimerkkejä.

6.4. Luku 13, s. 101-103: Lauseet 13.23, 13.24, 13.25, 13.26, 13.28 ja 13.29. Esimerkkejä upotuksista ja ei-upotuksista.

Joukon $A \subset X$ peite, osapeite ja avoin peite. Esimerkkejä näistä.

7.4. Luku 13, s. 104-106: Lauseet 13.33 (Lebesguen peitelause) ja 13.36. Esimerkki kompaktiuden oleellisuudesta peitelauseessa.

Yleisen topologisen avaruuden (ja sen osajoukon) peitekompaktius (kurssimme kompakti=jonokompakti). Lause 13.39 (Metrisessä avaruudessa jonokompakti=peitekompakti), esimerkki.

11.4. Luku 13: Esimerkkejä lauseesta 13.21 (Heine-Borel), sovelluksena muun muassa lause 15.17 (s. 131).

13.4. Luku 14, s. 110-114: Separaation käsite sivuutetaan. Yhtenäisyyden määritelmä. Esimerkkejä lähinnä epäyhtenäisistä joukoista.

Lauseet 14.6, 14.7, 14.9, 14.11, 14.12 ja 14.13 (Reunanylityslause).

14.4. Luku 14, s. 114-116: Lauseet 14.15, 14.16, 14.17, 14.19 ja 14.20. Esimerkkejä, joissa osoitettiin avaruuksia epähomeomorfisiksi keskenään (esim. $[0,1] \not\approx S^1$).

Polku, polkuyhtenäisyys, määritelmät. Hahmotelma: On olemassa polku $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, jossa $\alpha[0,1] = [0,1]^2$, siis kuvajoukko on neliö! Tämä α ei voi olla injektio (miksi?).

18.4. Luku 14, s. 116-117: Lauseet 14.22, 14.23 ja 14.25. Topologinen sinikäyrä yksityiskohtaisesti.

Janapolku normiavaruudessa.

20.4. Luku 14, s. 118-120: Konveksi joukko, murtoviivayhtenäisyys, määritelmät. Lause 14.27. Esimerkkejä, erityisesti $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$, kun $n > 1$. Lause 14.30.

Lyhyesti avaruuden komponentit ja niiden perusominaisuudet.

28.4. Algebran peruslause. Todistus Cauchyn ideaa seuraten, soveltaen Heine-Borelia polynomin itseisarvoon kompaktissa kiekossa ja kompleksilukujen geometrista esitystä.

LOPPU