TOPOLOGIA I, HARJOITUS 10, MALLIRATKAISUT (ANSSI MIRKA)

Tehtävä 1.(13:3) Tutki $\mathbb{R}^2$:n joukoista A_k, ovatko ne (a) kompakteja, (b) täydellisiä, kun

$A_1 = \{(x,y) : x^2+3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x,y) : xy = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) : x^2+3y^2 < 4\}$.

Ratkaisu. Seuraavat kolme lausetta on syytä pitää mielessä (läpi elämän):

- Lauseen 12.5 mukaan avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen.
- Lauseen 12.6 mukaan täydellisen avaruuden osajoukko on täydellinen, jos ja vain jos se on suljettu.
- Lauseen 13.14 mukaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko on kompakti, jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu.

Joukko A_1 on jatkuvan funktion alkukuva suljetusta joukosta, joten se on suljettu ja täten täydellinen. Lisäksi, jos $(x,y) \in A_1$, niin $x^2+y^2 \leq x^2+3y^2 \leq 2^2$, joten $A_1 \subset \bar{B}(0,2)$, ja täten joukko A_1 on myös rajoitettu. Näin ollen se on kompakti.

Myös joukko A_2 on jatkuvan funktion alkukuva suljetusta joukosta, joten se on suljettu ja täten täydellinen. Se ei ole rajoitettu, sillä $(r, 1/r) \in A_2$ kaikilla $r > 0$. Tästä seuraa, että joukko A_2 ei ole kompakti.

Joukko A_3 ei ole suljettu, sillä sen sulkeuma on joukko A_1. Tästä johtuen se ei voi olla kompakti, eikä täydellinen.

Tehtävä 2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason $\mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita, että löytyy sellainen piste $(a,b) \in A$ (ainakin yksi), että $x + 2y \leq a + 2b$ kaikilla $(x,y) \in A$.
Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta. Piirrä havainnekuva.

Ratkaisu. Joukko A on avaruuden $\mathbb{R}^2$ suljettuna rajoitettuna osajoukkona kompakti. Kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + 2y$, on jatkuva, joten Lauseen 13.21 mukaan se saa epätyhjässä kompaktissa joukossa A suurimman arvonsa jossakin pisteessä $(a,b) \in A$. Toisin sanoen $x + 2y \leq a + 2b$ kaikilla $(x,y) \in A$, mikä oli todistettava.

Tehtävä 3.(13:21) Olkoon kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jatkuva, ja olkoon se tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ (B^n avoin yksikkökuula). Osoita, että f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}^n$:ssä. Huom. Kuvauksen maalina voisi olla mikä tahansa metrinen avaruus.

Ratkaisu. Olkoon d avaruuden $\mathbb{R}^n$ euklidinen metriikka ja d' maaliavaruuden metriikka.

Funktio f on tasaisesti jatkuva myös pienemmässä joukossa $\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}^n$. Lisäksi Lauseen 13.36 mukaan jatkuva funktio kompaktissa joukossa on tasaisesti jatkuva. Näin ollen funktio f on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $\bar{B}^n(0,3)$, ja myös pienemmässä joukossa $B^n(0,3)$. On helppo nähdä, että perhe $D = \{\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}^n, B^n(0,3)\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin peite, jolla on Lebesguen luku $\lambda = 1$ (Oikeastaan Lebesguen luku määritellään vain kompaktien joukkojen peitteille [13.34 Huomautus 1], mutta on selvää mitä tässä tarkoitetaan).

Olkoon nyt $\varepsilon > 0$. Tällöin tasaisen jatkuvuuden nojalla on olemassa luvut $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon, \tag{1}$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}^n$, joilla pätee $d(x,y) < \delta_1$, ja myös kaikilla $x, y \in B^n(0,3)$, joilla pätee $d(x,y) < \delta_2$. Valitaan positiivinen luku $\delta < \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$.

Olkoon nyt $x, y \in \mathbb{R}^n$ siten, että $d(x,y) < \delta$. Koska $d(x,y) < 1$, ja 1 on peitteen D Lebesguen luku, niin molemmat pisteet x ja y kuuluvat peitteen D johonkin samaan jäseneen. Koska lisäksi $\delta < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, niin (1) pätee. Täten funktio f on tasaisesti jatkuva.

Tehtävä 4. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X, d) osajoukko, josta löytyy sellainen jono (x_n), että $d(x_k, x_n) \geq r$ kaikilla $k \neq n$. Osoita, että A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioiden avaruus $E = C([0,1], \mathbb{R})$ supnormilla $\| * \|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ kun $f \in E$. Osoita a-kohtaa hyväksi käyttäen, että suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se tunnetusti on suljettu ja rajoitettu joukko E:ssä.

Ohje. (b) Jono paloittain määriteltyjä (yksinkertaisia) funktiota $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu. (a): Antiteesi: Joukko A on kompakti. Tällöin tehtävänannon jonolla on suppeneva osajono (x_{n_k}). Suppeneva osajono on samalla Cauchyn jono, joten on olemassa $K \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_{n_k}, x_{n_p}) < r$ kaikilla $k, p > K$. Tämä on ristiriita, joten joukko A ei ole kompakti.

(b): Olkoon $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, jossa $n \in \mathbb{N}$, jolla $f_n(0) = f_n(\frac{1}{n+1}) = f_n(\frac{1}{n}) = f_n(1) = 0$ ja $f_n(\frac{1}{n+1/2}) = 1$ ja joka on affiini pisteiden $0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n}$ ja 1 rajoittamilla väleillä. Selvästi f_n on jatkuva kaikilla $n \in \mathbb{N}$, sekä $\|f_n\|_\infty = 1$.

Jos $n \neq k$, niin $n + 1/2 \notin [k, k+1]$, joten $\frac{1}{n+1/2} \notin [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$. Tästä seuraa, että $\|f_n - f_k\|_\infty \geq |f_n(\frac{1}{n+1/2}) - f_k(\frac{1}{n+1/2})| = |1 - 0| = 1$. Näin ollen (a)-kohdan mukaan avaruuden E suljettu yksikkökuula ei ole kompakti.

Tehtävä 5.(13:4, muunnos) Olkoon avaruus (X, d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja.
(a) Osoita jonon avulla, että leikkaus $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.
(b) Osoita, että jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö.
(c) Päteekö a-kohta, jos oletus kompaktiudesta pudotetaan pois?
Ohje. (a) Aloita valitsemalla pisteet $x_n \in A_n$. (c) Valitse $X = \mathbb{R}$.

Ratkaisu. (a): Aloitetaan hyvän neuvon mukaan valitsemalla pisteet $x_n \in A_n$(tämä on mahdollista, sillä oletuksen mukaan $A_n \neq \emptyset$), joista saamme jonon (x_n). Koska avaruus X on kompakti, niin tällä jonolla on osajono (x_{n_k}), joka suppenee jotakin pistettä $a \in X$ kohti. Olkoon nyt $m \in \mathbb{N}$ mielivaltainen. Pätee $x_{n_k} \in A_{n_k} \subset A_m$ kaikilla $n_k \geq m$, joten Lauseen 11.6 nojalla $a \in A_m$, sillä joukko A_m on suljettu. Täten $a \in \cap_{m\in\mathbb{N}} A_m \neq \emptyset$. Suljettujen joukkojen A_n leikkauksena $\cap_{m\in\mathbb{N}} A_m$ on suljettu. Lauseen 13.7 mukaan kompaktin avaruuden suljettu osajoukko on kompakti. Tämä huomio viimeistelee (a)-kohdan todistuksen.

(b): Vastaoletuksesta $x, y \in \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ja $x \neq y$ seuraisi, että $d(A_n) \geq d(x, y) > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $d(A_n) \nrightarrow 0$. Näin ollen kohta (b) pätee.

(c): Ei päde, sillä vastaesimerkiksi käyvät suljetut joukot $A_n = [n, \infty[\subset \mathbb{R}$. Tällöin $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. (Huom. Tyhjä joukko on määritelmän mukaan kompakti. Voisimme kaataa väitteen myös valitsemalla $A_n = [0, \infty[$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin leikkaus $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0, \infty[$ on epätyhjä, muttei kompakti.)

Tehtävä 6.(Vrt. edellinen) Olkoon avaruus (X, d) kompakti, ja olkoon $\{A_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ laskeva, ylinumeroituva joukkoperhe sen suljettuja, epätyhjiä osajoukkoja, siis $A_s \supset A_t$, kun $s, t \in \mathbb{R}_+$ ja $s < t$. Osoita, että leikkaus $\cap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$ on epätyhjä ja kompakti.
Ohje. Vastaoletus ja sopiva (ylinumeroituva) avoin peite X:lle, lause 13.39.

Ratkaisu. Vastaoletus: $\cap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t = \emptyset$. Ottamalla komplementit saadaan $\cup_{t\in\mathbb{R}_+} (X \setminus A_t) = X$. Siispä perhe $\{X \setminus A_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ on avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti, niin on olemassa äärellinen osapeite

$\{X \setminus A_{t_1}, \ldots, X \setminus A_{t_m}\}$, ja voimme olettaa, että $t_1 < \ldots < t_m$. Koska joukkojono on laskeva, niin myös peite $\{X \setminus A_{t_m}\}$ peittää avaruuden X, ja täten $X = X \setminus A_{t_m}$. Tämä puolestaan tarkoittaa, että $A_{t_m} = \emptyset$, mikä on ristiriidassa oletusten kanssa. Täten leikkauksen $\cap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t$ on oltava epätyhjä. Suljettujen joukkojen leikkauksena se on suljettu, ja kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona se on kompakti.

Itse asiassa väite seuraa myös edellisen tehtävän (a)-kohdasta huomiolla $\cap_{t \in \mathbb{R}_+} A_t = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Tämän tehtävän todistus kuitenkin toimii sellaisenaan yleisissä topologisissa avaruuksissa, missä kompaktius määritellään peitteiden avulla.