Topologi I, våren 2011
Kursförhör I, 1.3.2011
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Låt $a \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ och låt $r > 0$. Visa, att $d(\bar{B}^n(a,r)) = 2r$.

Bevis. Vi vet att $\bar{B}^n(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x-a| \leq r\}$.

Låt $x, y \in \bar{B}^n(a,r)$ vara givna. Då gäller

$$|x-y| \leq |x-a| + |a-y| \leq r + r = 2r,$$

alltså gäller $d(\bar{B}^n(a,r)) = \sup\{|x-y| \mid x, y \in \bar{B}^n(a,r)\} \leq 2r$.

Vi betecknar $a = (a_1, \ldots, a_n)$, där $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, och betraktar punkterna $x_1 = (a_1 - r, a_2, \ldots, a_n)$ och $x_2 = (a_1 + r, a_2, \ldots, a_n)$. Nu gäller att

$|x_1 - a| = \sqrt{(a_1 - r - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2 + \ldots + (a_n - a_n)^2} = \sqrt{r^2} = r$ och

$|x_2 - a| = \sqrt{(a_1 + r - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2 + \ldots + (a_n - a_n)^2} = \sqrt{r^2} = r$, dvs

$x_1 \in \bar{B}^n(a,r)$ och $x_2 \in \bar{B}^n(a,r)$. Det gäller även att

$|x_1 - x_2| = \sqrt{(a_1 - r - (a_1 + r))^2 + (a_2 - a_2)^2 + \ldots + (a_n - a_n)^2} = \sqrt{(2r)^2} = 2r$, och därmed gäller $d(\bar{B}^n(a,r)) \geq |x_1 - x_2| = 2r$.

Alltså har vi visat, att $d(\bar{B}^n(a,r)) = 2r$. $\square$

2. Antag att $\mathbb{X} = (\mathbb{X}, d)$ är ett metriskt rum och låt $U_1, \ldots, U_n$ vara öppna delmängder av $\mathbb{X}$.

Visa att $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ är en öppen delmängd av $\mathbb{X}$.

<u>Bevis.</u> Låt $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ vara given. Då gäller $x \in U_i$ för alla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Eftersom varje U_i är öppen, hittas det för varje mängd U_i ett $r_i > 0$ så att $B(x, r_i) \subset U_i$.

Vi betecknar $r = \min\{r_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Då gäller $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset U_i$ för alla $i \in \{1, \ldots, n\}$, dvs. $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i = U$. Alltså är U en öppen delmängd av $\mathbb{X}$. $\square$

3. a) Vi definierar en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ enligt

$$\begin{cases} f(x)=\pi, \text{ om } x\in\mathbb{Q} \\ f(x)=0, \text{ om } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Låt $a\in\mathbb{R}$ vara godtycklig. Visa att f inte är kontinuerlig i $a\in\mathbb{R}$.

b) Är $f|_{\mathbb{Q}}:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ och $f|_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}:\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ kontinuerliga eller ej? Bevisa.

Bevis a) Låt $a\in\mathbb{R}$ vara given. Vi väljer $\varepsilon=1$, och låter $\delta>0$ vara given. Vi ser nu på två skilda fall:

Fall 1°: $a\in\mathbb{Q}$. Vi vet att det mellan vilka två reella tal som helst hittas ett irrationellt tal. Därmed hittas ett $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\cap\,]a,a+\delta[$, och då gäller att

$|a-b|<\delta$, men $|f(a)-f(b)|=|\pi-0|=\pi>1$.

Fall 2°: $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Vi vet även att det mellan vilka två reella tal som helst hittas ett rationellt tal. Vi hittar alltså ett $q\in\mathbb{Q}\cap\,]a,a+\delta[$, och då gäller att

$|a-q|<\delta$, men $|f(a)-f(b)|=|0-\pi|=\pi>1$.

Alltså är f inte kontinuerlig i $a\in\mathbb{R}$.

b) Både $f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ och $f|_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})} : \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ är kontinuerliga, eftersom de är konstanta:

Låt $a \in \mathbb{Q}$ vara given, och låt $\varepsilon > 0$ vara given.

Vi väljer $\delta = 1$. Då om $|x-a| < \delta$, så gäller

$|f|_{\mathbb{Q}}(x) - f|_{\mathbb{Q}}(a)| = |\pi - \pi| = 0 < \varepsilon$. Alltså är $f|_{\mathbb{Q}}$ kont.

Låt nu $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ vara given, och låt igen $\varepsilon > 0$ vara given

Vi väljer $\delta = 1$. Då om $|x-b| < \delta$, så är

$|f|_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}(x) - f|_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}(b)| = |0-0| = 0 < \varepsilon$.

Alltså är även $f|_{(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}$ kontinuerlig. □

4. Visa att $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 < y < x^2 \text{ eller } x^2 < y < x^4\}$ är en öppen delmängd av $\mathbb{R}^2$.

Bevis. Vi definierar följande funktioner:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = y - x^4$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ g(x,y) = y - x^2$.

Både f och g är kontinuerliga, eftersom projektionerna $pr_1, pr_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $pr_1(x,y) = x$, $pr_2(x,y) = y$ är kontinuerliga (Sats 5.6), och eftersom summor och produkter av projektionsfunktionerna är kontinuerliga (Satserna 5.2 & 5.3)

Vi ser nu att $f^{-1}]0,\infty[\cap g^{-1}]-\infty,0[$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^4 > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 < 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 < y < x^2\}$ och att

$f^{-1}]-\infty,0[\cap g^{-1}]0,\infty[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^4 < 0\}$

$\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - x^2 > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y < x^4\}$.

Därmed är $U = (f^{-1}]0,\infty[\cap g^{-1}]-\infty,0[) \cup (f^{-1}]-\infty,0[\cap g^{-1}]0,\infty[)$.

U är då öppen i $\mathbb{R}^2$, eftersom $]0,\infty[$ och $]-\infty,0[$ är öppna i $\mathbb{R}$, och f och g är kontinuerliga, vilket betyder att $f^{-1}]0,\infty[$, $f^{-1}]-\infty,0[$, $g^{-1}]0,\infty[$ och $g^{-1}]-\infty,0[$

4, är öppna enligt Sats 4.8. Då är $f^{-1}]0,\infty[\cap g^{-1}]\infty,0[$ och $f^{-1}]-\infty,0[\cap g^{-1}]0,\infty[$ öppna, eftersom de är (ändliga) snitt av öppna mängder, och därmed är U öppen, eftersom den är en union av öppna mängder. $\square$