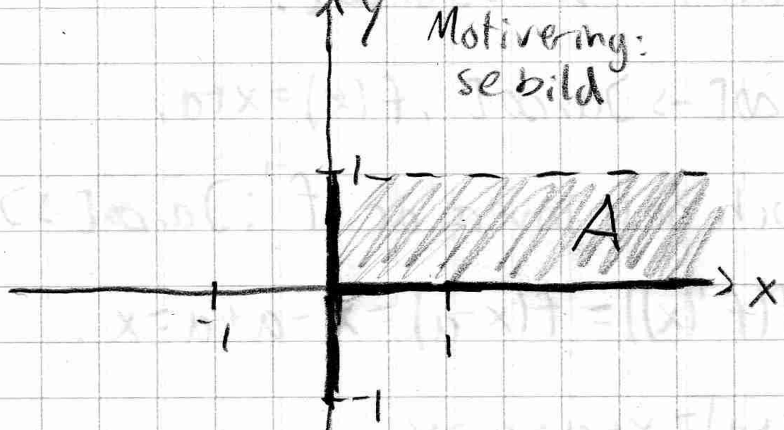
Topologi I, våren 2011
Övning 9, vecka 14
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg. 8.1: Bestäm int $\mathbb{Q}$, ext $\mathbb{Q}$ och $\partial\mathbb{Q}$ för $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$.

Lösn. Låt $x \in \mathbb{R}$ vara given, och låt $x \in U \circledcirc X$ vara en godtycklig omgivning för $x$. Då hittas ett $r>0$ så att $B(x,r) \subset U$. Därmed gäller $]x, x+\frac{r}{2}[ \subset U$. Eftersom både $x$ och $x+\frac{r}{2}$ är reella tal, hittas ett rationellt $q \in ]x, x+\frac{r}{2}[$ och ett irrationellt $y \in ]x, x+\frac{r}{2}[$. Därmed gäller $U \not\subset \mathbb{Q}$ och $U \not\subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dvs. $x \in \partial\mathbb{Q}$. Alltså är

$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, int $\mathbb{Q} = \emptyset$, ext $\mathbb{Q} = \emptyset$

2. Uppg. 8.2: Antag att $X = \mathbb{R}^2$ och
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0, x \geq 0, |y| < 1\}$. Bestäm int $A$, $\partial A$ och $\bar{A}$.




Motivering: se bild

int $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0, 0<y<1\}$

$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y=0, x\geq 0\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=0, -1 \leq y \leq 1\}$
$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y=1\}$

$\bar{A} = \partial A \cup \text{int} A$

3. Uppg 8.6: Visa att $\partial A = \emptyset$ om och endast om $A$ är både öppen och sluten.

Bevis: "$\Leftarrow$" Antag att $A \overset{\circ}{\subset} X$ och $A \overset{c}{\subset} X$. Då är $\bar{A} = A$, och enligt 8.3(+) är $\partial A = \bar{A} \setminus A$ om $A$ är öppen.

Därmed är $\partial A = \bar{A} \setminus A = A \setminus A = \emptyset$.

"$\Rightarrow$" Antag att $\partial A = \emptyset$. Enligt 8.3(4) är

$\bar{A} = A \cup \partial A = \text{int } A \cup \partial A$, dvs. $\bar{A} = A = \text{int } A$.

Eftersom $\bar{A} = A$ är $A$ sluten, och eftersom $A = \text{int } A$ är $A$ öppen enligt 8.3(2). $\square$

4. Visa att $]a, \infty[ \approx \mathbb{R} \approx ]-\infty, a[$, då $a \in \mathbb{R}$ (uppg 9.1)

Bevis. Vi vet att naturliga logaritmen $e: \mathbb{R} \to ]0, \infty[$ är kontinuerlig. Dess invers är $\ln: ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$, som är kontinuerlig. Därmed gäller $\mathbb{R} \approx ]0, \infty[$.

Vi definierar nu $f: ]0, \infty[ \to ]a, \infty[$, $f(x) = x + a$.

$f$ är klart kontinuerlig och dess invers är $f^{-1}: ]a, \infty[ \to ]0, \infty[$

$f^{-1}(x) = x - a$: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x-a) = x - a + a = x$.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+a) = x + a - a = x$.

4. Dessutom är $f^{-1}$ kontinuerlig, och därmed gäller $\mathbb{R} \overset{e}{\simeq} ]0,\infty[ \overset{f}{\simeq} ]a,\infty[$, dvs. $\mathbb{R} \simeq ]a,\infty[$ (Sats 9.8)

Vi definierar $g: ]0,\infty[ \to ]-\infty, a[$, $g(x) = -x+a$, g kont.

Dess (kontinuerliga) invers är $g^{-1}: ]-\infty,a[ \to ]0,\infty[$,

$g^{-1}(x) = -x+a$ : $(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = g(-x+a) = -(-x+a)+a = x$

$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(-x+a) = -(-x+a)+a = x$.

Alltså är $\mathbb{R} \overset{e}{\simeq} ]0,\infty[ \overset{g}{\simeq} ]-\infty,a[$, dvs. är

$]a,\infty[ \simeq \mathbb{R} \simeq ]-\infty,a[$. $\square$

5. Uppg 9.3: Bevisa Sats 9.7:

(1) $id: X \to X$ är en homeomorfism.

(2) Om $f: X \simeq Y$ så gäller $f^{-1}: Y \simeq X$

(3) Om $f: X \simeq Y$ och $g: Y \simeq Z$ så gäller $g \circ f: X \simeq Z$.

Bevis. (1) Vi vet att $id: X \to X$ är kontinuerlig, och att dess invers är $id: X \to X$, som då även är kontinuerlig

Alltså är id kont., bijektiv och dess invers är kont

$\Rightarrow$ id är en homeomorfism

5. (2) Ant. $f: X \to Y$. Då är $f^{-1}: Y \to X$ kontinuerlig och bijektiv (ty $f$ är bijektiv), och dess invers $f: X \to Y$ är kont. Alltså är $f^{-1}: Y \to X$.

(3) Antag att $f: X \approx Y$ och $g: Y \to Z$. Nu är $g \circ f: X \to Z$ kont. enligt 4.12. Dessutom är $g \circ f$ bijektiv, och dess invers är $f^{-1} \circ g^{-1}$. Eftersom $f$ och $g$ är homeomorfismer, är $f^{-1}$ och $g^{-1}$ kont, dvs $f^{-1} \circ g^{-1}$ är kont (4.12

Alltså gäller $g \circ f: X \approx Z$. □

6. Uppg. 9.7: Antag att $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ är grafen $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ för $f$. Metriken i $\Gamma$ är den som induceras av $\mathbb{R}^2$. Visa att $\Gamma \approx \mathbb{R}$.

Bevis. Vi definierar $g: \Gamma \to \mathbb{R}$, $g(x, f(x)) = x$, dvs. $g = pr_1|_\Gamma$, alltså är $g$ kontinuerlig. Vi definierar även $g^{-1}: \mathbb{R} \to \Gamma$, $g^{-1}(x) = (x, f(x))$. Nu är $g^{-1}$ kont:

Låt $a \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ vara givna. Nu hittas ett $\delta_f > 0$ så att om $|x-a| < \delta_f$ så är $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ($f$ kont.)

6. Välj $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \delta_f\}$. Då gäller att om $|x-a|<\delta$, så

är $\sqrt{(x-a)^2 + (f(x)-f(a))^2} < \sqrt{\delta^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2} \leq \sqrt{(\frac{\varepsilon}{2})^2 + (\frac{\varepsilon}{2})^2}$

$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon$, dvs. $g^{-1}$ är kont.

Vi visar nu att $g^{-1}$ är $g$:s invers:

$(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = g(x, f(x)) = x$

$(g^{-1} \circ g)(x, f(x)) = g^{-1}(g(x, f(x))) = g^{-1}(x) = (x, f(x))$

Alltså är $g: T \to \mathbb{R}$ en kont. bijektion vars invers

är kontinuerlig $\Rightarrow g: T \approx \mathbb{R}$. $\square$