Topologi I, våren 2011
Övning 8, vecka 13
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

<u>1.</u> Uppg 7.1; Sats 7.9: Om $E \circledcirc A \circledcirc X$, så är $E \circledcirc X$.

<u>Bevis</u>. Eftersom $E \circledcirc A$, existerar enligt sats 7.7 en sådan $F \circledcirc X$, att $E = A \cap F$. Eftesom $A \circledcirc X$, är då $E \circledcirc X$ som ett snitt av två slutna mängder.

<u>2.</u> Uppg 7.2: Vilka av följande $A \subset \bar{B}^2$ är öppna i $\bar{B}^2$?

a) $A = \{(x,y) \in \bar{B}^2 \mid xy > 0\}$ b) $A = \{(x,y) \in \bar{B}^2 \mid x \geq 0\}$

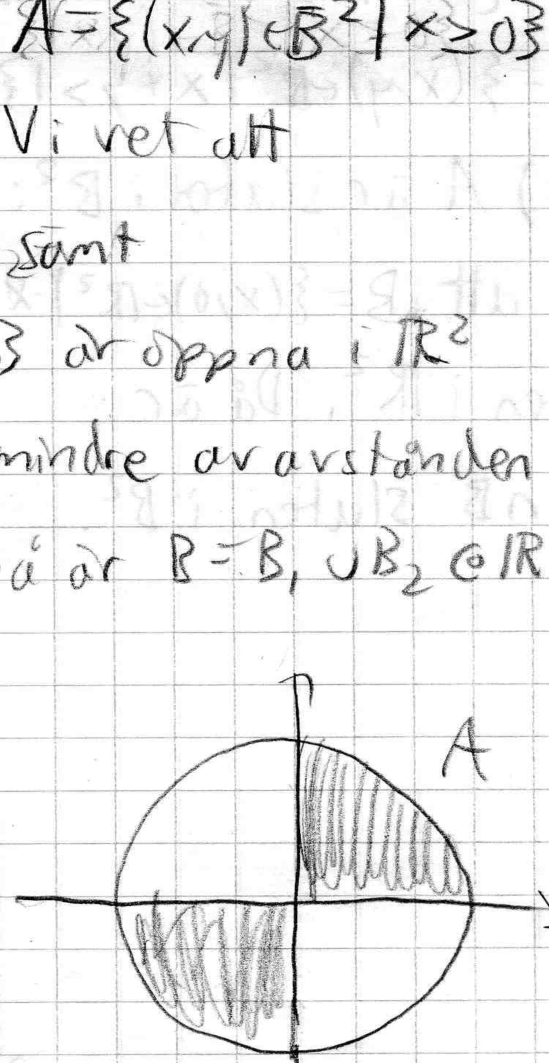
<u>Lösn.</u> a) A är öppen i $\bar{B}^2$: Vi vet att

$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ och } y > 0\}$ samt

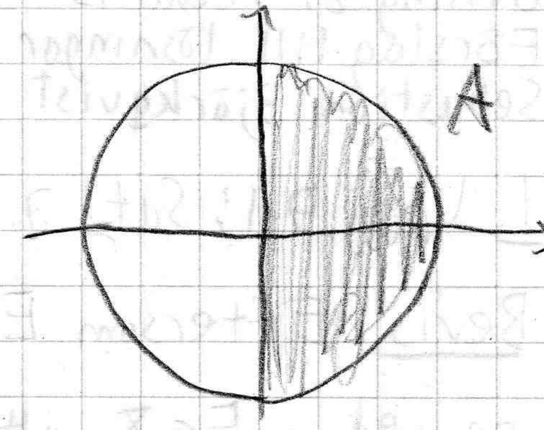
$B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \text{ och } y < 0\}$ är öppna i $\mathbb{R}^2$

(vi kan som radie r välja mindre av avstånden till koordinataxlarna). Då är $B = B_1 \cup B_2 \circledcirc \mathbb{R}^2$,

och $A = B \cap \bar{B}^2 \circledcirc \bar{B}^2$.



2. b) $A=\{(x,y)\in\bar{B}^2 \mid x\geq 0\}$ är ej öppen i $\bar{B}^2$.



Låt $r>0$ vara given. Vi definierar $r'=\min\{r,1\}$. Nu gäller $(0,0)\in A$, och $B_{\bar{B}^2}((0,0),r)\not\subset A$, ty

$(0,-\frac{r'}{2})\in \bar{B}^2\setminus A\cap B_{\bar{B}^2}((0,0),r')$

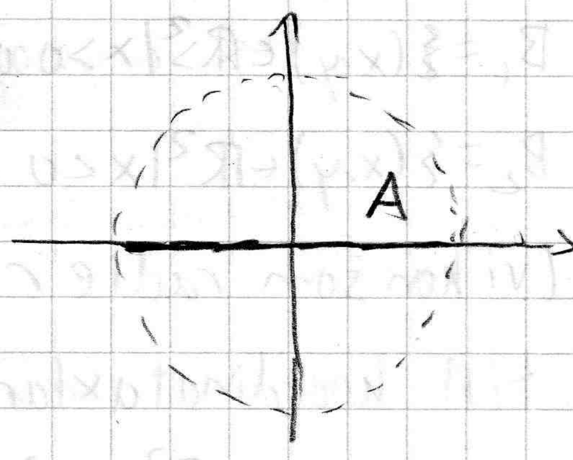
$\subset \bar{B}^2\setminus A\cap B_{\bar{B}^2}((0,0),r)$. Alltså är A ej öppen i $\bar{B}^2$.

3. Uppg 7.3: Vilka $A\subset B^2$ är slutna i B^2?

a) $A=\{(x,0)\in B^2 \mid -1<x<1\}$ b) $A=\{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})\in B^2 \mid n\in\mathbb{N}, n\geq 2\}$

c) $A=\{(x,y)\in B^2 \mid x+y>1\}$

Lösn. a) A är sluten i B^2:

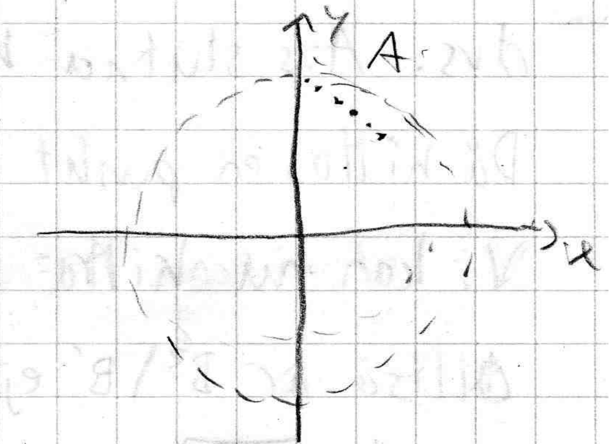


Vi vet att $B=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$ är sluten i $\mathbb{R}^2$. Då är

$A=B^2\cap B$ sluten i B^2.

3. b) $A = \{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) \in B^2 \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

A är sluten i B^2:



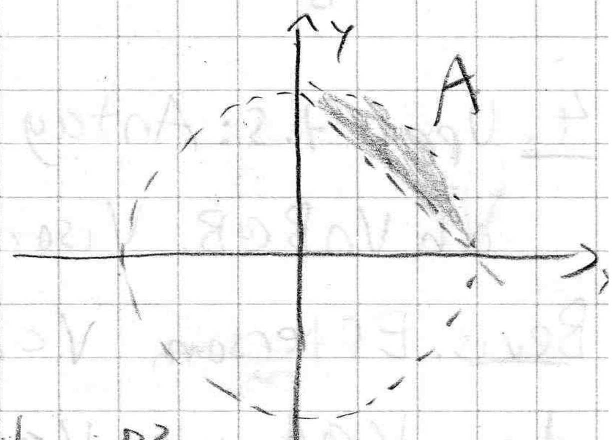
Vi kan på motsvarande sätt som i uppg 6.4 och 6.9 visa att

$\bar{A} = cl_{\mathbb{R}^2}(A) = A \cup \{(0,1)\}$.

Då är $A = B^2 \cap \bar{A}$ sluten i B^2.

c) $A = \{(x,y) \in B^2 \mid x+y > 1\}$

A är ej sluten i B^2:



Vi motiverar, varför

$cl_{B^2}(A) = \{(x,y) \in B^2 \mid x+y \geq 1\}$,

av vilket följer att A ej är sluten i B^2.

Vi definierar $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 1\}$. Det är lätt att se att $\bar{A'} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \geq 1\}$. Då gäller att $B = \bar{A'} \cap B^2 = \{(x,y) \in B^2 \mid x+y \geq 1\}$ är sluten i B^2.

Det är klart att $A \subset B$. För att visa att $B = cl_{B^2}(A)$, måste vi visa att om vi tar bort punkter från B, är den inte längre sluten. Därmed kommer B att vara

3\. c) den minsta slutna mängden som innehåller A, dvs. A:s slutna hölje (i $\bar{B}^2$). Antag att $A \subset B' \subset \bar{B}$. Då hittas en punkt $(x,y) \in \bar{B} \setminus B'$ för vilken $x+y=1$. Vi kan nu hitta ett $r>0$ så att $(x+r,y) \in A \subset B'$, Alltså är $\bar{B}^2 \setminus B'$ ej öppen, och B' ej sluten (i $\bar{B}^2$)

($r = \frac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{2}$ torde fungera). Alltså är

$\bar{B} = Cl_{\bar{B}^2}(A)$, och A är ej sluten i $\bar{B}^2$.

4\. Uppg. 7.5: Antag att $X = A \cup B$, $V \subset A \cap B$, $V \cap A \circledcirc A$, och $V \cap B \circledcirc B$. Visa att $V \circledcirc X$.

Bevis. Eftersom $V \subset A \cap B$, är $V \cap A = V$ och $V \cap B = V$, dvs. $V \circledcirc A$ och $V \circledcirc B$.

Låt $x \in V$ vara given. Eftersom $V \circledcirc A$, hittas en omg. $x \in U_A \circledcirc X = A \cup B$ så att $U_A \cap A \subset V$ (om man vill kan man tänka U_A som en kulomgivning som i definition 7.2. Det har ingen betydelse om vi använder oss av kulomgivningar eller godtyckliga omgivningar). På motsvarande sätt, eftersom $V \circledcirc B$, hittas en omg. $x \in U_B \circledcirc X$ för vilken

4. $U_B \cap B \subset V$. Nu gäller $x \in U_A \cap U_B \circledcirc X$, och vi får att

$(U_A \cap U_B) \cap (A \cup B) = (U_A \cap U_B) \cap A \cup (U_A \cap U_B) \cap B$

$\subset (U_A \cap A) \cup (U_A \cap B) \subset V \cup V = V$.

Alltså är $U_A \cap U_B$ en omgivning till x för vilken

$(U_A \cap U_B) \cap (A \cup B) \subset V$. Därmed är $V \circledcirc A \cup B = X$.

5. Uppg. 7:6: Ge exempel på sådana mängder

$A, B, V \subset \mathbb{R}$ att $\mathbb{R} = A \cup B$, $V \cap A \circledcirc A$, $V \cap B \circledcirc B$ och V

inte är öppen i $\mathbb{R}$.

Lösn. Låt $A = \{0\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ och $V = [0, 1[$.

Nu är $V \cap A = \{0\} = A \circledcirc A$, och $V \cap B =]0, 1[\circledcirc B$, men

$V = [0, 1[$ är inte öppen i $\mathbb{R}$.

6. Uppg. 7:7: Antag att $A, B \subset X$ och $\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$.

Visa att A och B är både öppna och slutna i $A \cup B$.

Bevis. $\bar{A} \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

Vi vet att $\bar{A} \circledcirc X$, och eftersom $\bar{A} \cap B = \emptyset$, gäller

$\bar{A} \cap (A \cup B) = A$. Då är A sluten i $A \cup B$ enl. sats 7.7.

På motsvarande sätt visar vi att B är sluten i $A \cup B$.

6. Eftersom $A\cap B=\emptyset$, är $A\cup B\setminus B=A$ och $A\cup B\setminus A=B$. Därmed är både A och B öppna i $A\cup B$, eftersom deras komplement är slutna. $\square$

Det är värt att notera, att kravet $\bar{A}\cap B=\emptyset=A\cap\bar{B}$ är nödvändigt; $A\cap B=\emptyset$ räcker ej, vilket följande exempel demonstrerar: Låt $A=[-1,0]\subset\mathbb{R}$ och $B=]0,1]\subset\mathbb{R}$. Nu är $A\cap B=\emptyset$, och även $\bar{A}\cap B=\emptyset$, ty $\bar{A}=A$, men $A\cap\bar{B}=[-1,0]\cap[0,1]=\{0\}$. Vi ser att $A\overset{c}{\subset}A\cup B$, ty $A=A\cup B\cap[-1,0]$. $B\overset{o}{\subset}A\cup B$, eftersom $B=A\cup B\cap\,]0,2[$.
A är dock inte öppen i $A\cup B$: Låt $r>0$ vara given. Då gäller $0+\frac{r}{2}\in B$, dvs. $B(0,r)\not\subset A$. Därmed är heller ej B sluten i $A\cup B$.