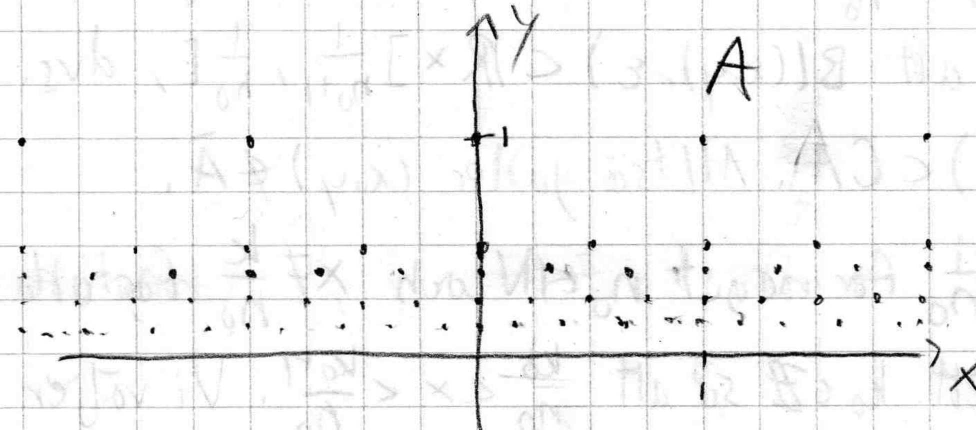
Topologi I, våren 2011
Övning 7, vecka 12
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg 6.9: Bestäm det slutna höljet i planet för mängden $A=\{(\frac{k}{n},\frac{1}{n}) \mid k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$.

Lösn.



Påst: $\bar{A} = A \cup \{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}$.

Vi vet att $A\subset\bar{A}$. Vi visar först att $\{(x,0) \mid x\in\mathbb{R}\}\subset \bar{A}$.

Låt $x\in\mathbb{R}$ och $\varepsilon>0$ vara givna. Vi vill hitta en punkt $a\in A\cap B((x,0),\varepsilon)$. Vi väljer nu $k\in\mathbb{Z}$ och $n\in\mathbb{N}$ så att $|\frac{k}{n} - x|<\frac{\varepsilon}{2}$ och $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Detta är möjligt, eftersom $\mathbb{Q}$ är tät i $\mathbb{R}$ (uppg. 6.2). Vi betecknar $a=(\frac{k}{n},\frac{1}{n})\in A$.

Nu gäller $d(x,a)=\sqrt{(\frac{k}{n} - x)^2+(\frac{1}{n}-0)^2}<\sqrt{(\frac{\varepsilon}{2})^2+(\frac{\varepsilon}{2})^2}=\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}<\varepsilon$,

dvs. $a\in B((x,0),\varepsilon)$ och därmed gäller $(x,0)\in\bar{A}$.

1. Om $y > 1$ eller $y < 0$ är det klart att det för alla $x \in \mathbb{R}$ gäller att $(x,y) \notin \bar{A}$.

Antag nu att $(x,y) \notin A$ och att $0 < y \leq 1$

Fall 1: $y \neq \frac{1}{n}$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Då gäller för något $n_0 \in \mathbb{N}$ att $\frac{1}{n_0+1} < y < \frac{1}{n_0}$. Vi väljer $\varepsilon = \min\{|y - \frac{1}{n_0+1}|, |y - \frac{1}{n_0}|\}$.

Då gäller att $B((x,y),\varepsilon) \subset \mathbb{R} \times]\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0}[$, dvs. att $B((x,y),\varepsilon) \subset CA$. Alltså gäller $(x,y) \notin \bar{A}$.

Fall 2: $y = \frac{1}{n_0}$ för något $n_0 \in \mathbb{N}$ och $x \neq \frac{k}{n_0}$ för alla $k \in \mathbb{Z}$.

Då hittas ett $k_0 \in \mathbb{Z}$ så att $\frac{k_0}{n_0} < x < \frac{k_0+1}{n_0}$. Vi väljer

$\varepsilon = \min\{|x - \frac{k_0}{n_0}|, |x - \frac{k_0+1}{n_0}|, |y - \frac{1}{n_0+1}|\}$. Då gäller att

$B((x,y),\varepsilon) \subset]\frac{k_0}{n_0}, \frac{k_0+1}{n_0}[\times]\frac{1}{n_0-1}, \frac{1}{n_0+1}[\subset CA$,

dvs. $B((x,y),\varepsilon) \subset CA$, alltså $(x,y) \notin \bar{A}$.

(I fall $n_0 = 1$ kan vi skriva $B((x,y),\varepsilon) \subset]\frac{k_0}{n_0}, \frac{k_0+1}{n_0}[\times]2, \frac{1}{n_0+1}[\subset CA$)

Vi har alltså visat att

$$\bar{A} = A \cup \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Uppg. 6.10: Antag att $A \subset X$ är begränsad.

Visa att $d(\bar{A}) = d(A)$.

Bevis. Låt $d(A) = r \in \mathbb{R}$, och låt $x, y \in \bar{A}$ vara givna. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då gäller att $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$ och att $B(y, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$, dvs. det hittas punkter $x', y' \in A$ så att $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$ och $d(y, y') < \frac{\varepsilon}{2}$. Nu är

$$d(x,y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = \frac{\varepsilon}{2} + r + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon,$$

och därmed är $d(\bar{A}) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in \bar{A}\} \leq r + \varepsilon$

Eftersom ε valdes godtyckligt, gäller $d(\bar{A}) \leq r = d(A)$

Eftersom $A \subset \bar{A}$, gäller p.g.a. diameterns monotonitet $d(A) \leq d(\bar{A})$, och därmed $d(\bar{A}) = d(A)$. □

3. Uppg 6.12: Antag att $f, g : X \to Y$ är kontinuerliga och att $A \subset X$ är en mängd med egenskapen $f|_A = g|_A$.

Visa att $f|_{\bar{A}} = g|_{\bar{A}}$.

Bevis. Låt $x \in \bar{A}$ och $\varepsilon > 0$ vara givna. Eftersom f och g är kontinuerliga, hittar vi sådana $\delta', \delta'' > 0$ att om $d(x, x') < \delta'$ så gäller $d'(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$, och om

3. $d(x,x')<\delta''$ så gäller $d'(g(x),g(x'))<\frac{\varepsilon}{2}$.

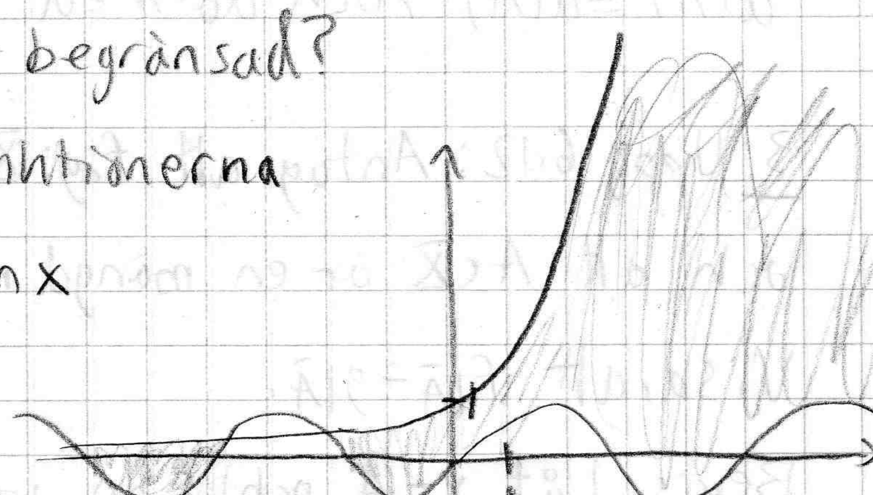
Låt $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$. Eftersom $x\in\bar{A}$, hittas ett $x_0\in A$ för vilket $d(x,x_0)<\delta$. Då gäller $d(x,x_0)<\delta'$ samt $d(x,x_0)<\delta''$. Dessutom eftersom $x_0\in A$, gäller $f(x_0)=g(x_0)$. Av detta följer att

$$d'(f(x),g(x))\leq d'(f(x),f(x_0))+d'(f(x_0),g(x_0))+d'(g(x_0),g(x))$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Eftersom ε valdes godtyckligt, gäller det att $d'(f(x),g(x))=0 \Rightarrow f(x)=g(x)$.

Alltså gäller $f|_{\bar{A}}=g|_{\bar{A}}$. □

4. Uppg 6.13: Visa att $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}, \sin x\leq y\leq e^x\}$ är sluten i planet. Är A begränsad?



Bevis. Vi definierar funktionerna

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y-\sin x$

och $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$g(x,y)=e^x-y$.

f och g är kontinuerliga enligt satserna 5.2 och 5.6, då vi vet att

4. sinusfunktionen och exponentfunktionen är kontinuerliga. Nu är

$f^{-1}([0,\infty[) \cap g^{-1}([0,\infty[) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \sin x\}$

$\cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid e^x \geq y\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \leq y \leq e^x\} = A$

Eftersom $[0,\infty[\in \mathbb{R}$ och f och g är kontinuerliga, är $A \in \mathbb{R}^2$ enligt sats 6.13 och 6.3.

A är ej begränsad, vilket vi bevisar med hjälp av ett motantagande: Antag att det hittas ett $r > 0$ så att $A \subset B(\bar{0}, r)$.

Fall 1°: $r < 1$. Då gäller $(e^2, 2) \in A$, men $d(\bar{0}, (e^2, 2)) > 1 > r \Rightarrow (e^2, 2) \notin B(\bar{0}, r)$ MS.

Fall 2°: $r \geq 1$. Då gäller att $(e^r, r) \in A$, men $d(\bar{0}, (e^r, r)) = \sqrt{(e^r - 0)^2 + (r-0)^2} > \sqrt{r^2} = r$, dvs. $(e^r, r) \notin B(\bar{0}, r)$ MS.

Alltså är motantagandet falskt, dvs. A är obegränsad. □

5. Uppg. 6.15: Visa att $f: X \to Y$ är kontinuerlig om och endast om $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ för alla $B \subset Y$.

Bevis. "$\Rightarrow$" Antag att f är kontinuerlig, och låt $B \subset Y$ vara given. Eftersom $B \subset \overline{B}$, gäller $f^{-1}B \subset f^{-1}\overline{B}$, och eftersom $\overline{B} \Subset Y$, gäller $f^{-1}\overline{B} \Subset X$ enligt sats 6.13. Då gäller enligt sats 6.8(3) att $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$.

"$\Leftarrow$" Antag att $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ för alla $B \subset Y$. Låt $V \Subset Y$ vara given. Då gäller $V = \overline{V}$, dvs. $\overline{f^{-1}V} \subset f^{-1}\overline{V} = f^{-1}V$. Eftersom $f^{-1}V \subset \overline{f^{-1}V}$ gäller enligt 6.8(1), måste det då gälla att $f^{-1}V = \overline{f^{-1}V}$, dvs. $f^{-1}V \Subset X$. Då är f kontinuerlig enligt sats 6.13.

6. Uppg. 6.17: Antag att $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ och $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$. Visa att

a) A och B är slutna och disjunkta b) $d(A,B) = 0$

Bevis. a) Vi definierar funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$. f är kontinuerlig enligt 5.3 och 5.6. Då är $A = f^{-1}\{0\} \Subset \mathbb{R}^2$ och $B = f^{-1}\{1\} \Subset \mathbb{R}^2$, ty $\{0\} \Subset \mathbb{R}$ och $\{1\} \Subset \mathbb{R}$.

6. Om $(x,y) \in A$ är $xy = 0$, dvs. $x = 0$ eller $y = 0$.

Då gäller $xy \neq 1$, dvs. $(x,y) \notin B$. Alltså är $A \cap B = \emptyset$.

b) Vi gör ett motantagande: $d(A,B) = r > 0$.

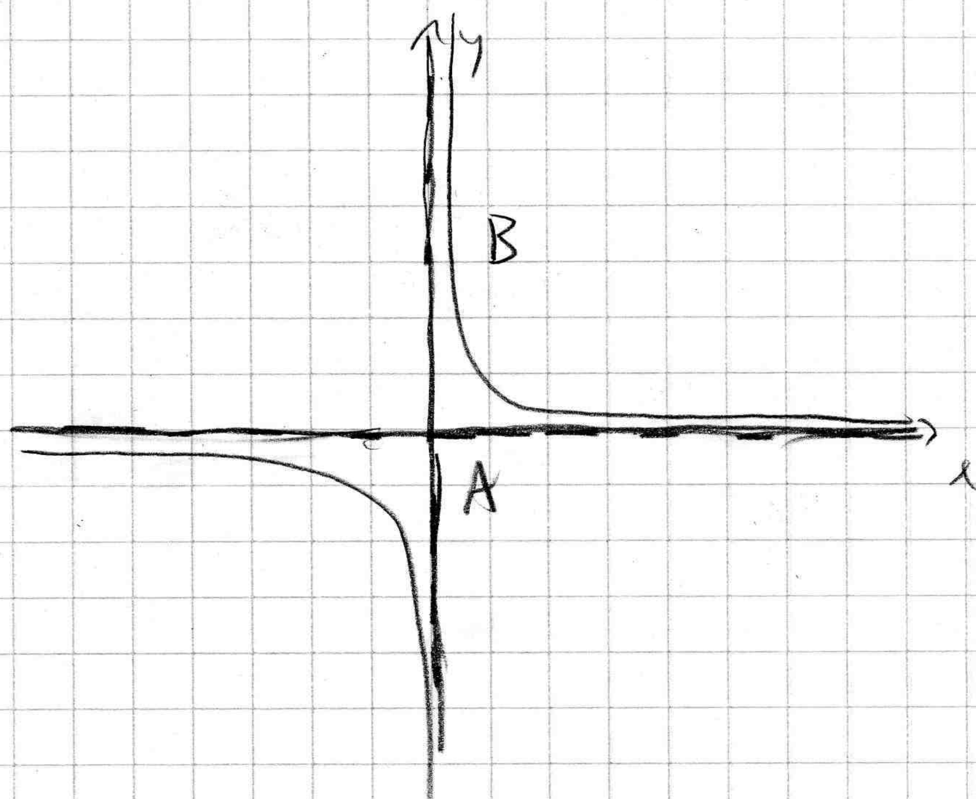
Fall 1, $r \geq 1$: Då gäller att $(2,0) \in A$ och $(2,\frac{1}{2}) \in B$, men

$d((2,0),(2,\frac{1}{2})) = \frac{1}{2} < r$. MS

Fall 2, $r < 1$: Då gäller att $(\frac{1}{r^2},0) \in A$ och $(\frac{1}{r^2},r^2) \in B$, men

$d((\frac{1}{r^2},0),(\frac{1}{r^2},r^2)) = r^2 < r$ (ty $r<1$). MS

Alltså är $d(A,B) < r$ $\forall r > 0$, dvs. $d(A,B) = 0$.



OBS! Denna uppgift ger oss en mycket lättare lösning på Övn 6 upp 6b), ty som exempel duger $B \cup \{\bar{0}\}$.