Topologi I, våren 2011
Övning 6, vecka 11
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

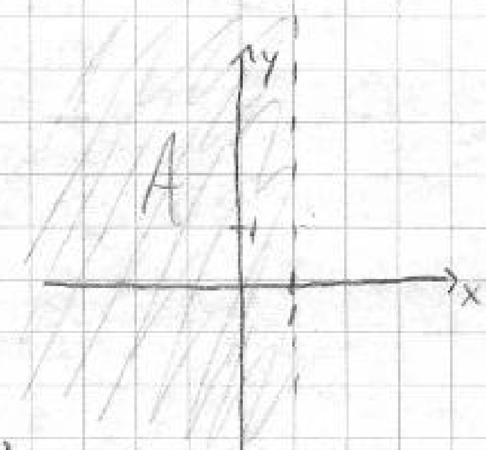
1. Uppg. 6:1: Är $A \subset \mathbb{R}^2$ sluten, då

a) $A = \{(x,y) \mid x < 1\}$ b) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

c) $A = \{(x,y) \mid x \neq 0, |y| \leq |x|\}$

Ifall A ej är sluten, bestäm det slutna höljet $\bar{A}$.

Lösn. a) $A = \{(x,y) \mid x < 1\}$



Nu är $CA = \{(x,y) \mid x \geq 1\}$ ej öppen:

Låt $y \in \mathbb{R}$ vara given, och låt $r > 0$ vara given. Nu gäller $(1,y) \in CA$,

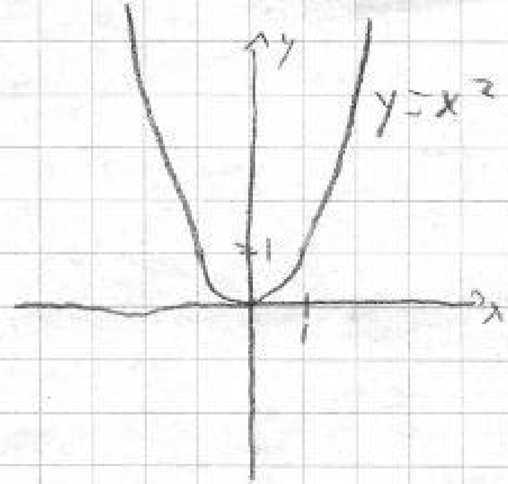
men $(1-\frac{r}{2}, y) \in A$, dvs. $B((1,y),r) \cap A \neq \emptyset$,

dvs. $B((1,y),r) \not\subset CA$, alltså är CA ej öppen, och A ej sluten.

Vi ser även från det vi gjorde ovan, att $(1,y) \in \bar{A}$, eftersom varje kulomgivning av $(1,y)$ möter A. Det är klart, att om $x > 1$, så hör inte (x,y) till $\bar{A}$ (vi kan välja $r = x-1$, och då är $B((x,y),r) \cap A = \emptyset$).

Alltså är $\bar{A} = \{(x,y) \mid x \leq 1\}$.

1.b) $A = \{(x,y) \mid y = x^2\}$



Nu är $CA = \{(x,y) \mid y > x^2\}$

$\cup \{(x,y) \mid y < x^2\}$.

Vi definierar funktionen

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y - x^2$.

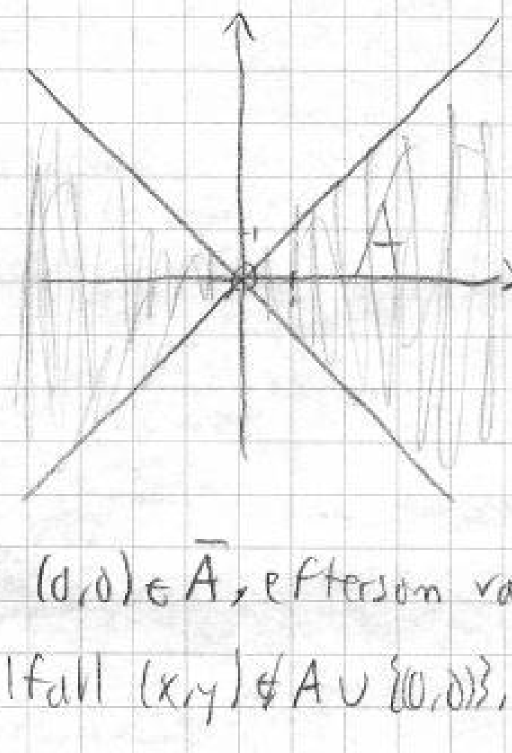
f är kontinuerlig enligt S.6, S.2 och S.3.

Då är $CA = f^{-1}(]-\infty, 0[\cup]0, \infty[)$ öppen i $\mathbb{R}^2$, eftersom

$]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$ är öppen i $\mathbb{R}$, och f är kontinuerlig.

Därmed är A sluten i $\mathbb{R}^2$.

c) $A = \{(x,y) \mid x \neq 0, |y| \leq |x|\}$



Vi ser att $(0,0) \notin A$, dvs.

$(0,0) \in CA$. Låt $r > 0$ vara given.

Nu gäller $B((0,0), r) \cap A \neq \emptyset$,

eftersom $(\frac{r}{2}, 0) \in A \cap B((0,0), r)$.

Då är CA ej öppen, dvs. A

ej sluten, men vi ser också att $(0,0) \in \bar{A}$, eftersom varje

kulomgivning av $(0,0)$ möter A. Ifall $(x,y) \notin A \cup \{(0,0)\}$,

kommer punkten inte och höra till $\bar{A}$.

1. c) I detta fall kan vi räkna ut avståndet från punkten till linjerna $y=x$ och $y=-x$. Båda avstånden är positiva, eftersom punkten (x,y) inte ligger på någondera linjen. Genom att välja till vår radie r det mindre av avstånden, får vi att $B((x,y),r) \cap A = \emptyset$, dvs. $(x,y) \notin \bar{A}$. Alltså är $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\} = \{(x,y) \mid |y| \leq |x|\}$.

2. Uppg. 6.2: Visa att $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Bevis. Låt $x \in \mathbb{R}$ vara givet. Vi vill visa att $x \in \bar{\mathbb{Q}}$, dvs. att vilken kulomgivning som helst av x skär $\mathbb{Q}$. Låt alltså $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ vara given. Nu gäller $x + \frac{r}{2} \in B(x,r)$, och naturligtvis att $x \in B(x,r)$. Vi vet att det mellan två reella tal alltid hittas ett rationellt tal, dvs. det existerar ett $q \in \mathbb{Q}$, $q \in]x, x+\frac{r}{2}[\subset B(x,r)$ $\Rightarrow q \in B(x,r)$. Alltså är $B(x,r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, dvs. $r \in \bar{\mathbb{Q}}$.
Vi har nu visat att $\mathbb{R} \subset \bar{\mathbb{Q}}$. Det är klart, att $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$, dvs. $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. $\square$

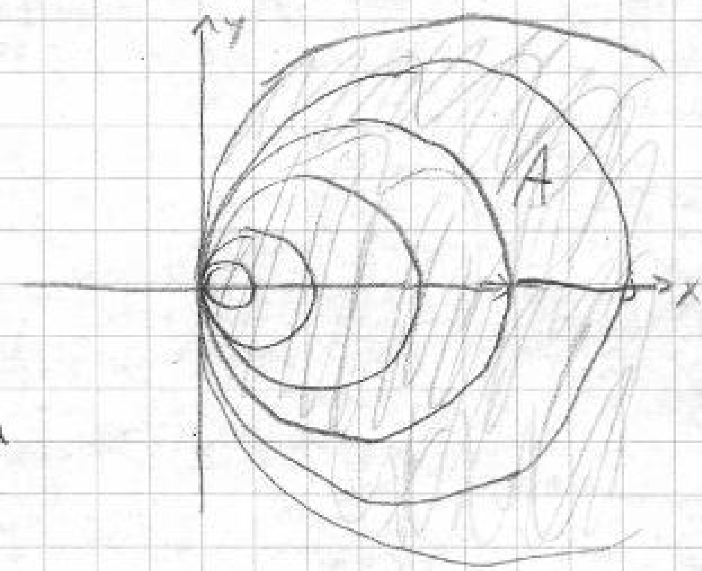
3. Uppg 6.3: Antag att $X = \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $A(r) = \overline{B}(re_1, r)$ och $A = \bigcup \{A(r) \mid r > 0\}$.

Undersök om $A(r)$ och A är öppna och/eller slutna i planet.

Lösn. Mängderna $A(r)$ är slutna i planet (ex. 6.2.2), men ej öppna: Låt $\varepsilon > 0$ vara given. Då gäller

$B(2re_1, \varepsilon) \not\subset \overline{B}(re_1, r)$, ty $(2r + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in B(2re_1, \varepsilon) \setminus \overline{B}(re_1, r)$.

$\Rightarrow A(r)$ ej öppen.



Vi undersöker nu mängden

$A = \bigcup \{A(r) \mid r > 0\}$.

$(0,0) \in A(r)$ $\forall r > 0$, dvs.

$(0,0) \in A$. Låt nu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vara sådan att $x \leq 0$ och $y \neq 0$.

Då gäller $(x,y) \notin A$:

1° $y \neq 0$: $d((r,0),(x,y)) = \sqrt{(r-x)^2 + (0-y)^2} \geq \sqrt{r^2 + y^2}$

$> \sqrt{r^2} = r \Rightarrow (x,y) \notin A(r)$ för alla $r > 0 \Rightarrow (x,y) \notin A$.

2° $x < 0$: $d((r,0),(x,y)) = \sqrt{(r-x)^2 + (0-y)^2} \geq \sqrt{(r-x)^2}$

$> \sqrt{r^2} = r \Rightarrow (x,y) \notin A(r)$ för alla $r > 0 \Rightarrow (x,y) \notin A$.

3. Låt nu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vara sådan, att $x > 0$.

Vi visar, att $(x,y) \in A$:

$d((r,0),(x,y)) = \sqrt{(r-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(r-x)^2 + y^2}$

$= \sqrt{r^2 - 2rx + x^2 + y^2}$. För att (x,y) skall höra till A,

måste detta avstånd vara $\leq r$. Vi löser alltså olikheten

$$r^2 - 2rx + x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$-2rx + x^2 + y^2 \leq 0$$

$$2rx \geq x^2 + y^2$$

$$r \geq \frac{x^2 + y^2}{2x}$$

Eftersom $x > 0$, existerar ett sådant $r > 0$.

Genom att sätta in detta r i uttrycket för

$d((r,0),(x,y))$, ser vi att avståndet blir r,

dvs. $(x,y) \in A\left(\frac{x^2+y^2}{2x}\right) \Rightarrow (x,y) \in A$.

Vi vet nu alltså att $A = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid x > 0\}$.

A är ej öppen, eftersom om $\varepsilon > 0$ är givet, så

gäller $B((0,0),\varepsilon) \not\subset A$, ty $(0-\frac{\varepsilon}{2},0) \in CA \cap B((0,0),\varepsilon)$.

A är ej sluten, eftersom $(0,y) \in CA$ för alla $y \neq 0$,

men om $\varepsilon > 0$ är givet, så gäller $B((0,y),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

3. eftersom $(\frac{\varepsilon}{2}, y) \in A \cap B((0,y), \varepsilon)$. Därmed är $\complement A$ ej öppen, dvs. A ej sluten. Igen ser vi med hjälp av ovanstående härledning att $(0,y) \in \bar{A}$, eftersom varje kulomgivning av $(0,y)$ skär A.
Ifall $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x<0$, så hör (x,y) ej till $\bar{A}$, eftersom $B((x,y), -\frac{x}{2}) \subset \complement A$. Alltså är
$\bar{A} = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$.

4. Uppg. 6:4. Låt $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Bestäm $\bar{A}$ ifall $\mathbb{R}$ har a) vanlig metrik b) $\{0,1\}$-metrik

Lösn. a) Vi vet, att $A \subset \bar{A}$. Vi visar nu, att $0 \in \bar{A}$:
Låt $r>0$ vara given. Nu hittas ett $n \in \mathbb{N}$, så att $\frac{1}{n} < r$, dvs. $\frac{1}{n} \in B(0,r) \Rightarrow B(0,r) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in \bar{A}$, eftersom varje kulomgivning av 0 skär A.
Låt $x<0$. Då gäller $B(x,-x) \cap A = \emptyset$, ty $B(x,-x) =]2x, 0[$
Låt $x>1$. Då gäller $B(x, x-1) \cap A = \emptyset$, ty $B(x, x-1) =]1, 2x-1[$.
Därmed om $x<0$ eller $x>1$, gäller $x \notin \bar{A}$.
Låt nu $x \in]0,1[\cap \complement A$. Då hittas ett sådant $n \in \mathbb{N}$,

4. att $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$. Vi betecknar $r = \min\{|\frac{1}{n} - x|, |\frac{1}{n+1} - x|\}$.
Då gäller $B(x, \frac{r}{2}) \subset \complement A$, eftersom $|x - \frac{1}{n}| \geq r > \frac{r}{2}$ och
$|x - \frac{1}{n+1}| \geq r > \frac{r}{2}$. Alltså gäller $B(x,r) \cap A = \emptyset$, dvs. $x \notin \bar{A}$.
Därmed är $\bar{A} = \{0\} \cup A$.

b) I $\{0,1\}$-metriken är alla mängder öppna, och därmed är alla mängder även slutna, eftersom deras komplement är öppet. Då är A sluten, och $A = \bar{A}$ enligt 6.8 (6).

<u>5.</u> Uppg. 6.5: Antag att $A, B \Subset \mathbb{R}$. Visa att $A \times B \Subset \mathbb{R}^2$.

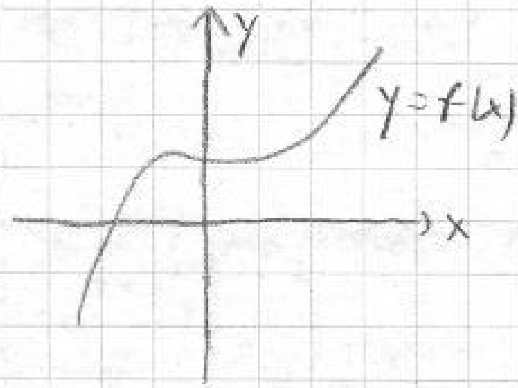
<u>Bevis.</u> Vi vet, att $id : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ är kontinuerlig.
Därmed är $id \times id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kont. enligt uppgift 5:3, och $(id \times id)_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ samt $(id \times id)_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ är kont. enligt 5.9. Vi ser nu, att
$(id \times id)_1^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$ är sluten i $\mathbb{R}^2$, ty $A \Subset \mathbb{R}$ och $(id \times id)_1$ är kontinuerlig (6.13). På motsvarande sätt ser vi att $(id \times id)_2^{-1}(B) = \mathbb{R} \times B \Subset \mathbb{R}^2$. Då är
$A \times B = A \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times B$ sluten i $\mathbb{R}^2$ (6.3). $\square$

6. Uppg 6.11: a) Visa att grafen för en kontinuerlig funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är sluten i planet.

b) Ge ett exempel på en diskontinuerlig funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, vars graf är en sluten mängd.

Lösn. a) Grafen för f i $\mathbb{R}^2$ är mängden

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$.



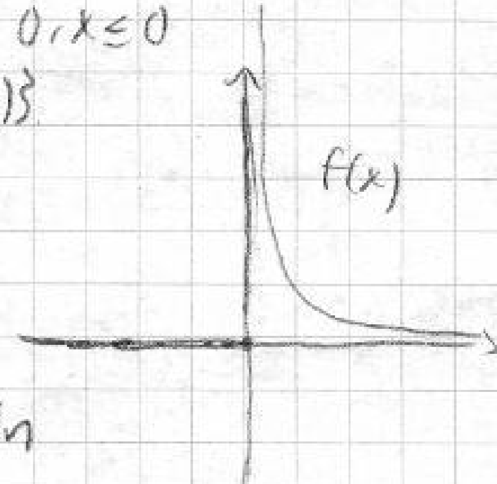
Vi definierar funktionen

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=y-f(x)$

h är kontinuerlig, eftersom f är kont., och enligt satserna 5.6 och 5.2.

Vi vet att $\{0\}\Subset\mathbb{R}$, alltså är $h^{-1}\{0\}=A \Subset \mathbb{R}^2$ enl. 6.13.

b) Vi definierar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$



Vi betecknar igen $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=f(x)\}$

Vi vill visa att CA är öppen.

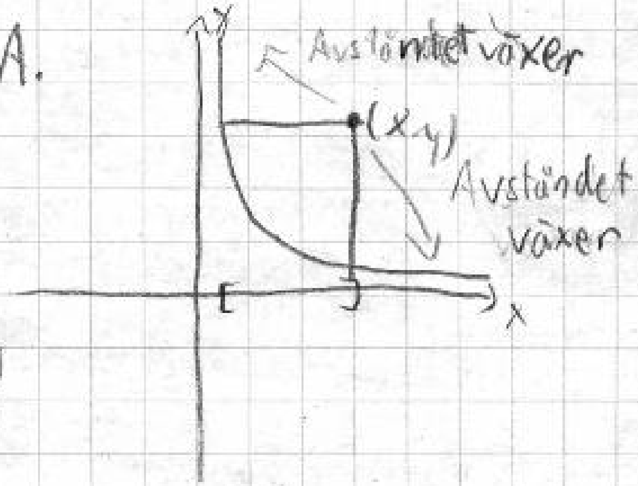
I fall $x<0$, väljer vi som vår radie r det mindre av avstånden till x-axeln och y-axeln. Då gäller $B((x,y),r)\subset CA$.

6. Ifall $y<0$ gör vi likadant.

Ifall $x>0, y>0$, kan vi lösa problemet på liknande sätt som i övn 3 uppg 1 (3:1 i boken) med hjälp av Bolzanos sats (se bild).

Vi ser nu på punkten $(x,0) \in CA$.

Vi vet att avståndet från $(x,0)$ till $(x, \frac{1}{x})$ är $\frac{1}{x}$.



Ifall $x'<x$, är $d((x,0),(x', \frac{1}{x'}))$
$= \sqrt{(x-x')^2 + (\frac{1}{x'})^2} \geq \frac{1}{x'} > \frac{1}{x}$.

Antag alltså att $x' \geq x$. Nu är
$d((x,0),(x', \frac{1}{x'})) = \sqrt{(x-x')^2 + (\frac{1}{x'})^2} = \sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + \frac{1}{x'^2}}$.

Kommer detta avstånd att vara $\geq \frac{1}{x}$? För att se om avståndet växer, deriverar vi kvadraten på avståndet med avseende på x':

$\frac{D}{dx'}(x^2 - 2xx' + x'^2 + \frac{1}{x'^2}) = -2x + 2x' - \frac{2}{x'}$.

I punkten x är derivatan negativ, dvs. avståndet minskar. Vi ser dock att derivatan är växande, då $x'>1$, eftersom då är $x' > \frac{1}{x'}$.

6. Vi kollar när derivatan blir positiv:

$$-2x + 2x' - \frac{2}{x'} = 0 \quad | \cdot x'$$

$$-2xx' + 2x'^2 - 2 = 0 \quad | : 2$$

$$x'^2 - xx' - 1 = 0$$

$$x' = \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x}{2} + 1}.$$

Vi hittar alltså ett x_0' så att derivatan är positiv om $x' > x_0'$. Därmed hittas en positiv undre gräns för avståndet från $(x,0)$ till linjen $y = \frac{1}{x}$, alltså hittas ett $r > 0$ så att $B((x,0),r) \cap A = \emptyset$.

På motsvarande sätt hittas ett $r > 0$ så att $B((0,y),r) \cap A = \emptyset$. Därmed är CA öppen, och A sluten. $\square$