Topologi I, våren 2011
Övning 5, vecka 8
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg. 5.1: Låt $f, g: X \to \mathbb{R}^n$ vara avbildningar.

Vi def. $f \cdot g: X \to \mathbb{R}^n$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ (inre produkt).

Visa, att om f och g är kontinuerliga, så är $f \cdot g$ kontinuerlig.

Bevis. Vi anpassar beviset av Sats 5.3:

Låt $\varepsilon > 0$ och $a \in X$ vara givna. Då gäller för alla $x \in X$

$$|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)| = |f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)|$$
$$= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a) + f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)|$$
$$\leq |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(a)| + |f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a)|$$
$$= |f(x) \cdot (g(x) - g(a))| + |(f(x) - f(a)) \cdot g(a)|$$
$$\overset{\text{Schwarz}}{\leq} |f(x)||g(x) - g(a)| + |f(x) - f(a)||g(a)|.$$

Eftersom f är kontinuerlig i a, hittas en omgivning U så att $|f(x) - f(a)| < 1$. Därmed gäller

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| < 1 + |f(a)|.$$

1. Kontinuiteten av f ger oss en omgivning V av a att $|f(x)-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}$ och kontinuiteten av g ger oss en omgivning W av a så att $|g(x)-g(a)| < \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}$. Då är $U \cap V \cap W$ en omgivning av a för vilken

$$|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(a)| \leq |f(x)||g(x)-g(a)| + |f(x)-f(a)||g(a)|$$
$$< (1+|f(a)|)\frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)} + \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}|g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Alltså är $f\cdot g$ kontinuerlig. $\square$

2. Uppg. 5.2: Visa att $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-1 < xyz < \sin(1-y)\}$ är öppen i $\mathbb{R}^3$.

__Bevis.__ Vi definierar funktionerna $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$f(x,y,z) = xyz$, kontinuerlig enligt Sats 5.3

$g(x,y,z) = -(x^2-1)$, kontinuerlig enligt 5.3 och 5.2

$h(x,y,z) = -\sin(1+y)$, kontinuerlig enligt 5.2 och 4.12.

Då är även $f+g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ och $f+h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kontinuerliga enligt Sats 5.2.

2. $f+g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x,y,z) = xyz-(x^2+1)$.

Nu är $U = (f+g)^{-1}(]0,\infty[) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz-(x^2+1)>0\}$
$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz > x^2+1\}$ öppen i $\mathbb{R}^3$ enligt Sats 4.8, eftersom $]0,\infty[\circledcirc \mathbb{R}$.

$f+h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(f+h)(x,y,z) = xyz - \sin(1+y)$

Nu är $V = (f+h)^{-1}(]-\infty,0[) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid xyz-\sin(1+y)<0\}$
$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \sin(1+y) > xyz\}$ öppen i $\mathbb{R}^3$ enligt Sats 4.8, eftersom $]-\infty,0[\circledcirc \mathbb{R}$.

Nu gäller $U\cap V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+1<xyz<\sin(1+y)\} = A$, dvs. $A \circledcirc \mathbb{R}^3$ enligt Sats 3.5. $\square$

3.5:3 Antag att $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ är kontinuerliga. Visa att $h(x,y) = (f(x),g(y))$ är kontinuerlig, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Bevis. Enligt Sats 5.9 är $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ kontinuerlig om och endast om komponentfunktionerna $h_1,h_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ är kontinuerliga. Vi ser att

$h_1(x,y) = (pr_1\circ h)(x,y) = f(x)$ och $h_2(x,y) = (pr_2\circ h)(x,y) = g(x)$.

Observera att h_1 inte är samma funktion som f, eftersom de har olik definitionsmängd!

3. Vi visar nu att h_1 är kontinuerlig:

Låt $\varepsilon > 0$ och $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vara given. Eftersom f är kontinuerlig, hittas ett $\delta > 0$ så att om $|x - x_0| < \delta$ så är $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Vi ser att

$$|(x,y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq \sqrt{(x-x_0)^2} = |x - x_0|,$$

dvs. om $|(x,y) - (x_0, y_0)| < \delta$, är även $|x - x_0| < \delta$, och därmed gäller $|h_1(x,y) - h_1(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Alltså är h_1 kontinuerlig.

På motsvarande sätt visas, att h_2 är kontinuerlig.

Då är h kontinuerlig enligt S.9.

4. Uppg S.4: Låt $a \in \mathbb{R}^n$. Visa, att $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot a$, är Lipschitz och därmed kontinuerlig.

Bevis. Låt $x, y \in \mathbb{R}^n$ vara givna. Nu gäller

$$d'(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |x \cdot a - y \cdot a|$$
$$= |(x-y) \cdot a| \leq |x-y||a| = |a| \, d(x,y)$$

$\Rightarrow$ f är $|a|$-Lipschitz och därmed kontinuerlig. $\square$

5. Uppg. 5.5: Visa noggrannt, att $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) = (xy, \sin(2y+z), 3\log(1+|xyz|)),$$

är kontinuerlig.

Bevis. Vi antas veta att sin och log är kontinuerliga. Vi använder oss av Sats 5.9 och visar att f_1, f_2, f_3 är kontinuerliga. Enligt Sats 5.6 är $pr_1, pr_2, pr_3: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kontinuerliga, där $pr_1(x,y,z) = x$, $pr_2(x,y,z) = y$ och $pr_3(x,y,z) = z$.

Då är $f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_1(x,y,z) = xy$ kontinuerlig enligt Sats 5.3., eftersom vi kan skriva $f = pr_1 \cdot pr_2$

Vi definierar nu $c_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $c_2(x,y,z) = 2$. c_2 är en konstantfunktion och därmed kontinuerlig.

Då är $c_2 \cdot pr_2 + pr_3$ kontinuerlig enligt 5.3 och 5.2.

Vi betecknar $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin x$, g kontinuerlig.

Då ser vi att $g \circ (c_2 \cdot pr_2 + pr_3)$ kontinuerlig enl. 4.12., men eftersom $f_2(x,y,z) = \sin(2y+z)$, är $f_2 = g \circ (c_2 \cdot pr_2 + pr_3)$ kontinuerlig.

5. Vi definierar nu $c_1, c_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$c_1(x,y,z) = 1$, $c_3(x,y,z) = 3$ $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Nu är $pr_1 pr_2 + pr_3$ kont. enligt 5.2. och 5.3.

Vi definierar $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a(x) = |x|$. h är kontinuerlig enligt 4.6. Då är även $a \circ (pr_1 pr_2 + pr_3)$ kontinuerlig enligt 4.12. Eftersom c_1 är kontinuerlig, är $c_1 + a \circ (pr_1 pr_2 + pr_3)$ kontinuerlig (5.2) Vi def. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \log(x)$, som vi antar vara kont. Då är $c_3(h \circ (a \circ (pr_1 pr_2 + pr_3)))$ kontinuerlig enligt 4.12 och 5.3, men vi ser att

$c_3(h \circ (a \circ (pr_1 pr_2 + pr_3)))(x,y,z) = 3 \log(1 + |xy + z|)$,

dvs. $f_3 = c_3(h \circ (a \circ (pr_1 pr_2 + pr_3)))$ är kontinuerlig.

Eftersom alla komponentfunktionerna f_1, f_2, f_3 är kontinuerliga, är f kontinuerlig. $\square$

6. Uppg. 5.6: Antag, att $A \neq \emptyset \neq B$, och att $d(A,B) > 0$.
Visa, att $d(x,A) + 5d(x,B) > 0$ för alla $x \in X$, och att
$f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + 5d(x,B)}$ är kontinuerlig.
Bestäm största och minsta värdet för f.

Bevis. Låt $x \in X$ vara given. Per definition gäller, att $d(x,A) \geq 0$ och att $d(x,B) \geq 0$. Låt nu $a \in A$, $b \in B$ vara givna. Då gäller

$$0 < d(a,x) + d(x,b) \geq d(a,b)$$. Infimum över alla $a \in A$:

$$\Rightarrow d(A,x) + d(x,b) \geq d(A,b)$$. Infimum över alla $b \in B$:

$$d(A,x) + d(x,B) \geq d(A,B) > 0.$$

Alltså är $d(A,x) > 0$ eller $d(x,B) > 0$, dvs.
$d(x,A) + 5d(x,B) > 0$ för alla $x \in X$.

Enligt 4.6 är $d(x,A)$ och $d(x,B)$ kontinuerliga, och därmed är även $d(x,A) + 5d(x,B)$ kontinuerlig.
Eftersom $d(x,A) + 5d(x,B) > 0$ för alla $x \in X$, kan vi definiera funktionen $\dfrac{1}{d(x,A) + 5d(x,B)}$. Den är kontinuerlig enligt 4.13.

6. Då är $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A) + 5d(x,B)}$ kontinuerlig enligt 5.3.

Eftersom $d(x,A) \geq 0$ och $d(x,A) + 5d(x,B) > 0$, är $f(x) \geq 0$ för alla $x \in X$, och eftersom $d(x,A) + 5d(x,B) \geq d(x,A)$ för alla $x \in X$, är $f(x) \leq 1$ för alla $x \in X$. Vi ser att om $a \in A$, är $d(x,A) = 0$, dvs. $f(a) = 0$, och om $b \in B$, gäller $5d(x,B) = 0$, dvs. $f(b) = 1$. Alltså är f:s största värde 1 och minsta värde 0. $\square$