Topologi I, våren 2011
Övning 4, vecka 7
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg 3.9: Antag, att a är isolerad i $A, B \subset X$. Visa, att a är isolerad i $A \cup B$. Visa genom motexempel att detta inte gäller för oändliga unioner.

Bevis. Eftersom a är isolerad i A och B, hittas omgivningar V_a och V_b så att $V_a \cap A = \{a\}$ och $V_b \cap B = \{a\}$. Då är $V_a \cap V_b$ öppen enl. 3.5, och $a \in V_a \cap V_b$. Därmed gäller $a \in (V_a \cap V_b) \cap (A \cup B)$. Dessutom gäller $(V_a \cap V_b) \cap (A \cup B) =$
$(V_a \cap V_b \cap A) \cup (V_a \cap V_b \cap B) \subset (V_a \cap A) \cup (V_a \cap B) = \{a\}$,
dvs. $\{a\} = (V_a \cap V_b) \cap (A \cup B)$. Eftersom $V_a \cap V_b$ är en omgivning till a, är nu a isolerad i $A \cup B$. $\square$

Motexempel: På tallinjen $\mathbb{R}$ är punkten 0 isolerad i mängden $\{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1]$ för alla $n \in \mathbb{N}$, men inte isolerad i mängden $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1] = [0,1]$.

2. Uppg. 3.10: Visa att mängden av alla isolerade punkter i ett metriskt rum är öppen.

Bevis. Låt (X, d) vara ett metriskt rum, och A vara mängden isolerade punkter i X. För att visa att A är öppen, räcker det att för en godtycklig punkt $a \in A$ hitta en omgivning V som innehålls i A. (Sats 3.10).
Låt alltså $a \in A$ vara given. Eftersom a är isolerad i X, hittas en omgivning $V \subset X$ så att $V \cap X = \{a\}$, dvs $V = \{a\}$. Då gäller $V = \{a\} \subset A$, alltså är A öppen. □

3. Uppg. 3.11: Visa att ett ändligt metriskt rum är diskret.

Bevis: Låt (X, d) vara ett ändligt metriskt rum, dvs. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Låt $x_i \in X$ vara given.
Vi betecknar $r = \min\{d(x_i, x_j) \mid j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}\}$.
r är alltså det minsta avståndet från punkten x_i till någon annan punkt $x_j \in X$. Nu gäller $B(x_i, r) \cap X = \{x_i\}$, eftersom det för alla $x_j \neq x_i$ gäller $d(x_i, x_j) \geq r$. Eftersom $B(x_i, r)$ är en omgivning till $x_i \in X$, är X diskret.

4. Uppg 4.1: Låt X, Y vara metriska rum, Y vara diskret, och $f: X \to Y$ vara kontinuerlig. Visa att varje punkt $x \in X$ har en omgivning är f är konstant.

Bevis. Låt $x \in X$ vara given. Eftersom Y är diskret, existerar det en omgivning V av $f(a)$ för vilken $V \cap Y = \{f(a)\}$. Eftersom f är kontinuerlig, hittas det enligt Sats 4.7 en omgivning U ara att $f(U) \subset V$. Då om $x \in U$, gäller $f(x) \in V = V \cap Y = \{f(a)\}$, dvs. $f(x) = f(a)$. Alltså är f konstant i U. □

5. Uppg. 4.5: Antag att $f: X \to Y$ är M-Lipschitz och att $g: Y \to Z$ är M' Lipschitz. Visa att $g \circ f$ är MM'-Lipschitz.

Bevis. Vi betecknar metrikerna i X, Y och Z med d, d' och d''. Låt $x, y \in X$ vara givna. Då gäller

$$d''((g\circ f)(x), (g\circ f)(y)) = d''(g(f(x)), g(f(y))$$
$$\overset{g\, M'\text{Lip.}}{\leq} M' d'(f(x), f(y)) \overset{f\, M\text{-Lip.}}{\leq} M'M\, d(x,y) = MM'd(x,y).$$

Alltså är $g \circ f$ MM'-Lipschitz. □

6. Uppg. 4.6: Visa, att $f: X \to Y$ är kontinuerlig i vilken isolerad punkt som helst.

Bevis. Låt $x \in X$ vara en isolerad punkt i X, och låt V vara en omgivning till $f(x)$. Eftersom x är isolerad, hittas en omgivning U av x för vilken $U \cap X = \{x\}$, dvs. $U = \{x\}$. Då gäller $fU = \{f(x)\} \subset V$. Detta uppfyller villkor (2) i Sats. 4.7, alltså är f kontinuerlig i x. $\square$

7. Uppg. 4.9: Låt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Är f kontinuerlig om:

a) definitionsmängden har den vanliga metriken och målmängden har $\{0,1\}$-metriken

b) mängderna ovan har ombytta metriker?

Lösn. a) Nej. Vi ser på punkten $x = 0$ och väljer $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Då är $B(f(0), \frac{1}{2}) = \{f(0)\}$, men för alla $\delta > 0$ gäller $f(B(0,\delta)) = f(]-\delta,\delta[) = [0,\delta^2[\not\subset \{f(0)\} = B(f(0), \frac{1}{2})$, dvs. f är ej kontinerlig i $x = 0$.

b) Ja, f är kontinuerlig: Låt $x \in \mathbb{R}$ och $\varepsilon > 0$ vara givna.

7. Vi väljer $\delta = \frac{1}{2}$. Då gäller $B(x,\delta) = B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$,
och därmed $f(B(x,\delta)) = \{f(x)\} \subset B(f(x),\varepsilon)$.
Alltså är f kontinuerlig.
Vi kan även använda oss av föregående uppgift:
Eftersom en funktion $f: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ är kontinuerlig
i alla isolerade punkter $a \in \mathbb{X}$, är f kontinuerlig
i alla punkter ifall $\mathbb{X}$ är diskret.