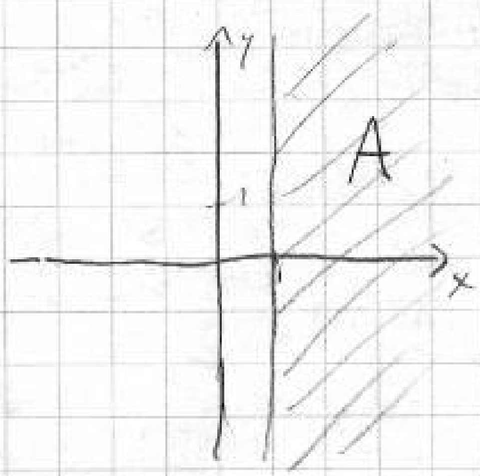
Topologi I, våren 2011
Övning 3, vecka 6
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg. 3.1: Undersök om $A \subset \mathbb{R}^2$ är en öppen mängd, då

a) $A = \{(x,y) \mid x \geq 1\}$ b) $A = \{(x,y) \mid x^2+1-y<0\}$

Lösn. a) Mängden $A = \{(x,y) \mid x \geq 1\}$ är ej öppen i $\mathbb{R}^2$.

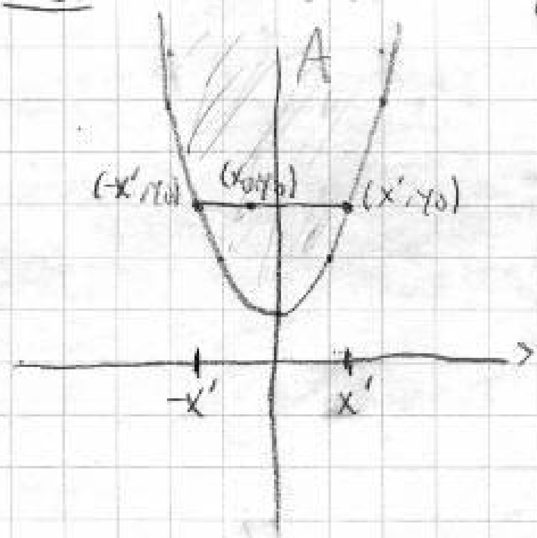


För att visa detta, ser vi på punkten $(1,0) \in A$. Låt $r>0$ vara given. Nu gäller $d((1,0),(1-\frac{r}{2},0))$
$= \sqrt{(1-(1-\frac{r}{2}))^2+(0-0)^2} = \sqrt{(\frac{r}{2})^2} = \frac{r}{2} < r$,
dvs. $(1-\frac{r}{2},0) \in B((1,0),r)$.

Eftersom $1-\frac{r}{2}<1$, gäller $(1-\frac{r}{2},0) \notin A$, dvs. $B((1,0),r) \not\subset A$. Därmed ingår ingen kulomgivning $B((1,0),r)$ i A, alltså är A inte öppen.

b) Mängden $A = \{(x,y) \mid x^2+1-y<0\} = \{(x,y) \mid y > x^2+1\}$ är öppen i $\mathbb{R}^2$. För att motivera detta, ser vi på en godtycklig punkt $(x_0,y_0) \in A$. Då gäller $y_0 > x_0^2+1$. Nu hittas punkter $-x', x' \in \mathbb{R}$ för vilka det gäller

1.b) $x'^2+1=(-x')^2+1=y_0$. Alltså är punkterna $(-x', y_0)$ och (x', y_0) på parabeln. Det är klart, att ifall vi går högre upp längs parabeln från punkterna $(-x', y_0)$ eller (x', y_0), kommer avståndet till punkten (x_0, y_0) att växa.



Vi begränsar oss alltså till punkter på parabeln mellan $-x'$ och x'. Vi definierar funktionen

$f: [-x', x'] \to \mathbb{R}$, $f(x) = d((x, x^2+1), (x_0, y_0))$

$= \sqrt{(x-x_0)^2+(x^2+1-y_0)^2}$. f är kontinuerlig, och $f(x) > 0$ för alla $x \in [-x', x']$, ty punkten (x_0, y_0) ligger ej på parabeln. Funktionen f kommer enligt Weierstrass min-max-sats att få ett minsta värde i någon punkt $z \in [-x', x']$. Då gäller $r = f(z) > 0$, och $B((x_0, y_0), r) \subset A$, eftersom

$d((x_0, y_0), (x, x^2+1)) \geq r$ för alla $x \in \mathbb{R}$.

Alltså är A öppen.

2. Uppg 3.2: Antag att $A \subset \mathbb{R}^2$ är öppen, och $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$

Kan $A \cup \{z\}$ vara öppen?

Lösn. Ja. Låt $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}$, och $z = \bar{0} \in \mathbb{R}^2 \setminus A = \{\bar{0}\}$.

Nu är A öppen, eftersom om $(x,y) \in A$, så väljer vi

$r = d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2}$. Då är $B((x,y),r) \subset A$.

Nu är $A \cup \{z\} = \mathbb{R}^2$, som klart är öppen.

3. Uppg 3.3: Antag att X är ett metriskt rum,

att $G \subset X$ är öppen och att $F \subset G$ är ändlig.

Visa att $G \setminus F$ är öppen.

Bevis. Låt $x \in G \setminus F$ vara given. Eftersom G är öppen,

hittas ett $r_0 > 0$ för vilket $B(x, r_0) \subset G$. Eftersom

$x \notin F$, gäller för alla punkter $f_1, \ldots, f_n \in F$ att

$r_i = d(x, f_i) > 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vi betecknar

$r = \min\{r_0, r_1, \ldots, r_n\}$. Då gäller $B(x,r) \subset B(x, r_0) \subset G$,

och $B(x,r) \cap F = \emptyset$, dvs. $B(x,r) \subset G \setminus F$.

Alltså är $G \setminus F$ öppen. $\square$

4. Uppg. 3.5: Visa att en delmängd $A \subset X$ i ett metriskt rum (X, d) kan skrivas som snittet av alla sina omgivningar.

Bevis. Låt $\{U_i : i \in I\}$ vara mängden av A:s omgivningar. Eftersom $A \subset U_i$ för alla $i \in I$, gäller klart att $A \subset \bigcap_{i \in I} U_i$. Vi visar nu att $\bigcap_{i \in I} U_i \subset A$, och därmed $A = \bigcap_{i \in I} U_i$:
Låt $x \in \bigcap_{i \in I} U_i$. Motantagande: $x \notin A$. Då är $X \setminus \{x\}$ öppen, och $A \subset X \setminus \{x\}$, dvs $X \setminus \{x\}$ är en omgivning till A. Naturligtvis gäller $x \notin X \setminus \{x\}$, dvs $x \notin \bigcap_{i \in I} U_i$ MS. Alltså måste $x \in A$, och därmed $\bigcap_{i \in I} U_i = A$. $\square$

5. Uppg. 3.7: Antag att X är ett metriskt rum och $f : X \to \mathbb{R}$ en sådan avbildning, att $A_r = \{x \in X \mid f(x) < r\}$ är öppen för varje $r \in \mathbb{Q}$. Visa att A_r är öppen för varje $r \in \mathbb{R}$.

Bevis. Låt $r \in \mathbb{R}$. Om $r \in \mathbb{Q}$, är A_r öppen enl. ant. Vi antar alltså att $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, och definierar mängden $B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b < r\}$.

5. Då är A_b öppen för varje $b \in B$, och därmed är $\bigcup_{b \in B} A_b$ öppen enligt Sats 3.4.

Vi visar, att $A_r = \bigcup_{b \in B} A_b$:

"$\subset$" Låt $x \in A_r$. Då är $f(x) < r$, och eftersom det finns ett rationellt tal mellan vilka två reella tal som helst, hittas ett $b \in \mathbb{Q}$ för vilket $f(x) < b < r$. Alltså gäller $x \in A_b$, och därmed $x \in \bigcup_{b \in B} A_b$.

"$\supset$" Låt $x \in \bigcup_{b \in B} A_b$. Då hittas ett $b \in B$ för vilket $x \in A_b$, dvs. $f(x) < b$. Eftersom $b < r$, gäller $f(x) < r$, alltså $x \in A_r$.

Vi har visat, att $A_r = \bigcup_{b \in B} A_b$ är öppen i X för alla $r \in \mathbb{R}$. $\square$

6. Finns det distinkta omgivningar till delmängderna A och B i $\mathbb{R}$, då $A = [0,1]$ och

a) $B = [2,3]$ b) $B =]1,3[$

Lösn. a) Ja, t.ex. $]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[\supset A$ och $]\frac{3}{2}, \frac{7}{2}[\supset B$.

b) Nej. Låt U vara en omgivning till A, och V en omgivning till B. Då måste det för något

6. $r>0$ gälla, att $B(1,r) \subset U$. Därmed gäller
$1+\frac{r}{2} \in U$, och $1+\frac{r}{2} \in B \subset V$, dvs. $U \cap V \neq \emptyset$.
Alltså hittas inga disjunkta omgivningar för
A och B.