Topologi I, våren 2011
Övning 2, vecka 5
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg. 2.1: Visa, att $\{0,1\}$-metriken är en metrik.

Bevis: Låt X vara en mängd. Vi definierar

$$d: X \times X \to \mathbb{R}_+, \quad d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{om } x \neq y \\ 0, & \text{om } x = y. \end{cases}$$

Låt $x, y, z \in X$ vara godtyckliga.

(M1) 1°: Antag, att $x = z$. Då gäller

$$d(x,z) = 0 = 0 + 0 \leq d(x,y) + d(y,z)$$

2°: Antag, att $x \neq z$. Då gäller $x \neq y$ eller $y \neq z$, alltså vi får $d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$.

(M2) 1°: Antag, att $x = y$. Då gäller

$$d(x,y) = 0 = d(y,x)$$

2°: Antag, att $x \neq y$. Då får vi

$$d(x,y) = 1 = d(y,x)$$

(M3) Om $x = y$, är $d(x,y) = 0$ enl. def. Om $d(x,y) = 0$, måste $x = y$, för annars vore $d(x,y) = 1$. $\square$

2. Låt d vara en metrik i $X \neq \emptyset$, och låt $a \in \mathbb{R}$.

För vilka värden på a är ad en metrik?

Lösn. Vi antar först att $a > 0$. Låt $x, y, z \in X$.

(M1): $ad(x,z) = a(d(x,z)) \overset{d \text{ metrik}}{\leq} a(d(x,y) + d(y,z))$
$= ad(x,y) + ad(y,z)$.

(M2): $ad(x,y) = a(d(x,y)) \overset{d \text{ metrik}}{=} a(d(y,x)) = ad(y,x)$

(M3): $ad(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \overset{d \text{ metrik}}{\Leftrightarrow} x = y$

Alltså ad är en metrik, om $a > 0$.

Antag nu att $a < 0$. Då är ad inte en metrik, ty funktionen ad får negativa värden (en metrik definieras som en funktion $X \times X \to \mathbb{R}_+$).

Vi antar till sist att $a = 0$. Om $X = \{x\}$, dvs. X är en enpunktsmängd, är ad en metrik i X, nollmetriken: $ad(x,x) = 0$. Villkoren (M1)-(M3) gäller trivialt. Om X inte är en enpunktsmängd, är $ad = 0d$ ej en metrik, ty $ad(x,y) = 0 \cdot d(x,y) = 0$, fastän $x \neq y$.

3. Uppg. 2.4: Undersök, om f och g är metriker i $\mathbb{R}$:

a) $f(x,y) = |x-y|^2$ b) $g(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

Lösn. a) f är inte en metrik i $\mathbb{R}$:

Vi ser på punkterna $0, 2, 4 \in \mathbb{R}$. Då gäller

$$|4-0|^2 = 4^2 = 16 > 8 = 4+4 = |4-2|^2 + |2-0|^2,$$

dvs triangelolikheten gäller ej.

b) g är en metrik i $\mathbb{R}$:

Vi noterar först att om $a^2 \leq b^2$ och $a, b \geq 0$, så gäller $a \leq b$. Vi kallar detta (*).

(M1): $(\sqrt{|x-z|})^2 = |x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

$\leq |x-y| + 2\sqrt{|x-y|}\sqrt{|y-z|} + |y-z|$

$= (\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|})^2$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \sqrt{|x-z|} \leq \sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}$.

(M2): $\sqrt{|x-y|} = \sqrt{|y-x|}$

(M3): $x = y \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x-y|} = 0$.

4. Uppg. 2.6: Antag att d och e är metriker i X. Visa, att $d+e$ och $d \vee e$ är metriker i X.

Bevis: $d+e : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $(d+e)(x,y) = d(x,y)+e(x,y)$.

Låt $x,y,z \in X$ vara godtyckliga.

(M1) $(d+e)(x,z) = d(x,z)+e(x,z)$

$\overset{\substack{d\text{ metr.}\\ e\text{ metr.}}}{\leq} d(x,y)+d(y,z)+e(x,y)+e(y,z)$

$= d(x,y)+e(x,y)+d(y,z)+e(y,z) =$

$= (d+e)(x,y)+(d+e)(y,z)$

(M2) $(d+e)(x,y) = d(x,y)+e(x,y) \overset{\substack{d\text{ metr.}\\ e\text{ metr.}}}{=} d(y,x)+e(y,x)$

$= (d+e)(y,x)$.

(M3) $(d+e)(x,y)=0 \iff d(x,y)+e(x,y)=0$

$\iff d(x,y)=0$ och $e(x,y)=0 \iff x=y$.

$d \vee e : X \times X \to \mathbb{R}_+$, $(d \vee e)(x,y) = \max\{d(x,y), e(x,y)\}$.

(M1) 1°: Antag, att $d(x,z) \geq e(x,z)$. Då gäller

$(d \vee e)(x,z) = d(x,z) \overset{d\text{ metr.}}{\leq} d(x,y)+d(y,z)$

$\leq (d \vee e)(x,y) + (d \vee e)(y,z)$.

4. (M1) 2°: Antag, att $e(x,z) \geq d(x,z)$. Då gäller

$$(d \vee e)(x,z) = e(x,z) \overset{e \text{ metr.}}{\leq} e(x,y) + e(y,z)$$

$$\leq (d \vee e)(x,y) + (d \vee e)(y,z).$$

(M2) 1°: Antag, att $d(x,y) \geq e(x,y)$. Då gäller

$$(d \vee e)(x,y) = d(x,y) \overset{d \text{ metr.}}{=} d(y,x) = (d \vee e)(y,x)$$

2°: Antag, att $e(x,y) \geq d(x,y)$. Då gäller

$$(d \vee e)(x,y) = e(x,y) \overset{e \text{ metr.}}{=} e(y,x) = (d \vee e)(y,x).$$

(M3) $(d \vee e)(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0$ och $e(x,y) = 0$

$\iff x = y$.

5. Uppg. 2.7: Antag att e är $\{0,1\}$-metriken i $\mathbb{R}$. Visa, att $d(x,y) = |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2)$ definierar en metrik i $\mathbb{R}^2$. Bestäm i denna metrik kulorna $B(\bar{0},1)$, $B(\bar{0},2)$ och $B(\bar{0},3)$.

Lösn. Låt $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

(M1): $d(x,z) = |x_1 - z_1| + e(x_2, z_2) \leq$

$$\overset{e \text{ metr.}}{\leq} |x_1 - y_1| + |y_1 - z_1| + e(x_2, y_2) + e(y_2, z_2)$$

$$= |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2) + |y_1 - z_1| + e(y_2, z_2) = d(x,y) + d(y,z).$$

5. (M2) $d(x,y) = |x_1 - y_1| + e(x_2, y_2)$

$\overset{e\ \text{metr.}}{=} |y_1 - x_1| + e(y_2, x_2) = d(y,x)$.

(M3) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0$ och $e(x_2, y_2) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = y_1$ och $x_2 = y_2 \Leftrightarrow x = y$.

Alltså är d en metrik i $\mathbb{R}^2$.

Vi undersöker nu kulorna $B(\bar{0}, r)$, $r = 1, 2, 3$:

Vi ser på avståndet $d((x_1, x_2), \bar{0})$:

Om $x_2 = 0$, är $e(x_2, 0) = 0$, dvs.

$d((x_1, x_2), \bar{0}) = |x_1 - 0| = |x_1|$

Om $x_2 \neq 0$, är $e(x_2, 0) = 1$, dvs.

$d((x_1, x_2), \bar{0}) = |x_1 - 0| + 1 = |x_1| + 1$

$B(\bar{0}, 1)$: Om $x_2 = 0$, gäller $d((x_1, x_2), \bar{0}) < 1$

$\Leftrightarrow |x_1| < 1$. Detta gäller då $x_1 \in]-1, 1[$

Om $x_2 \neq 0$, gäller $d((x_1, x_2), \bar{0}) < 1 \Leftrightarrow |x_1| + 1 < 1$

$\Leftrightarrow |x_1| < 0$. Detta gäller för inga $x_1 \in \mathbb{R}$.

Alltså är $B(\bar{0}, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in]-1, 1[, x_2 = 0\}$

5. $B(\bar{0},2)$: Om $x_2 = 0$, gäller $d((x_1,x_2),\bar{0}) < 2$
$\Leftrightarrow |x_1| < 2$. Detta gäller, då $x_1 \in]-2,2[$.

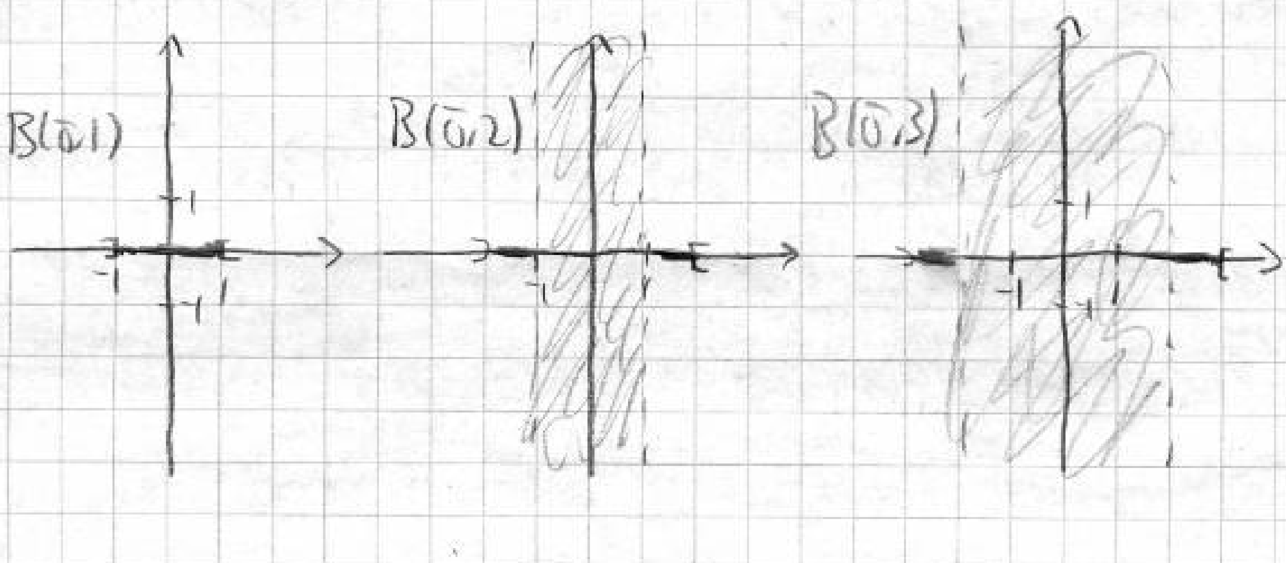
Om $x_2 \neq 0$, gäller $d((x_1,x_2),\bar{0}) < 2$
$\Leftrightarrow |x_1| + 1 < 2 \Leftrightarrow |x_1| < 1$. Detta gäller, då $x_1 \in]-1,1[$.

Alltså är

$$B(\bar{0},2) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in]-2,2[\,, x_2 = 0\} \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in]-1,1[\,, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

På motsvarande sätt får vi

$$B(\bar{0},3) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in]-3,3[\,, x_2 = 0\} \cup \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in]-2,2[\,, x_2 \in \mathbb{R}\}$$



6. Uppg. 2.8: Bestäm $d(A)$, då $A \subset \mathbb{R}^2$ och

a) $A = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$

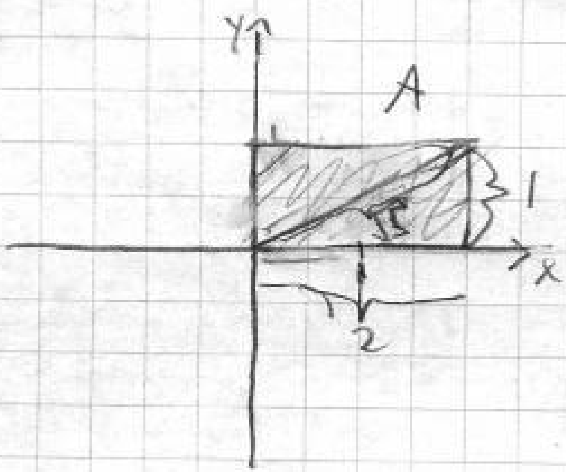
b) $A = \overline{B}(0,1) \cup B(10e_1, 2)$.

Lösn. a) Låt $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$. Då gäller

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{\le 2} + \underbrace{(y_1-y_2)^2}_{\le 1}} \le \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Å andra sidan är $d((2,1),(0,0)) = \sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{5}$.

Alltså är $d(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} = \sqrt{5}$.



b) $A = \overline{B}(0,1) \cup B(10e_1, 2)$. Vi betecknar

$A_1 = \overline{B}(0,1)$ och $A_2 = B(10e_1, 2)$.

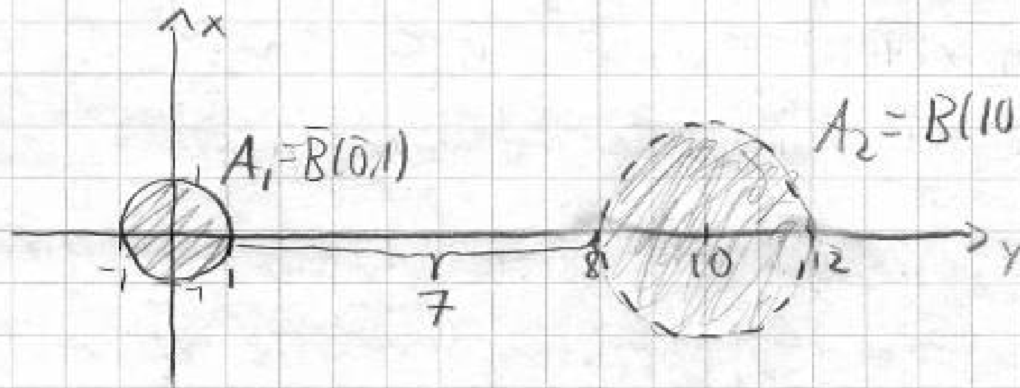
Nu gäller klart, att $d(A_1) = 2$ och $d(A_2) = 4$.

Det är även lätt att övertyga sig om att

$d(A_1, A_2) = 7$, t.ex. genom att studera bilden

på nästa sida.

6.



Enligt Sats 2.15 gäller det nu, att

$$d(A)=d(A_1\cup A_2)\le d(A_1)+d(A_2)+d(A_1,A_2)=$$

$$=2+4+7=13,\ \text{dvs. } d(A)\le 13.$$

Påstående: $d(A)=13$. Vi gör ett motantagande: $d(A)=13-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Låt $\varepsilon'=\min\{\varepsilon,1\}$. Då gäller

$$d(\underset{A_1}{(-1,0)},\underset{A_2}{(12-\tfrac{\varepsilon'}{2},0)})=\left|-1-(12-\tfrac{\varepsilon'}{2})\right|=\left|-13+\tfrac{\varepsilon'}{2}\right|$$

$$=13-\frac{\varepsilon'}{2}\ge 13-\frac{\varepsilon}{2}>13-\varepsilon,$$

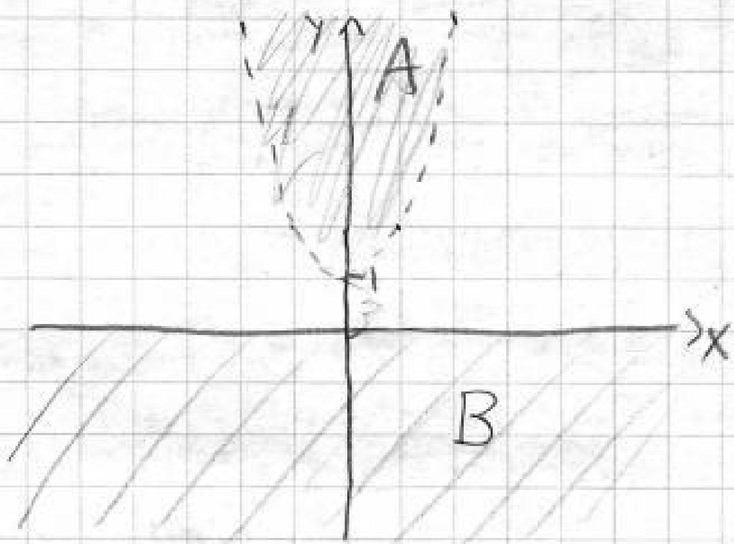
vilket motsäger $d(A)=13-\varepsilon$. Alltså måste det gälla $d(A)\ge 13$ och $d(A)\le 13 \Rightarrow d(A)=13$.

7. Uppg. 2.9: Bestäm $d(A,B)$ mellan

$A=\{(x,y) \mid x^2+1-y<0\}$ och $B=\{(x,y) \mid y<0\}$

a) i den vanliga metriken b) i $\{0,1\}$-metriken.

Lösn. $A=\{(x,y) \mid x^2+1-y<0\}=\{(x,y) \mid y>x^2+1\}$



a) Vi inser att för att få kortaste avståndet från en punkt på parabeln $y=x^2+1$ till linjen $y=0$ måste vi gå längs en linje som är vinkelrät mot linjen $y=0$. Alltså är avståndet från en punkt (x, x^2+1) på parabeln till linjen $y=0$ följande:

$$\sqrt{(x-x)^2+(x^2+1-0)^2}=\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1.$$

Klart får x^2+1 sitt minsta värde då $x=0$:

$0^2+1=0+1=1.$

7. Alltså är det kortaste avståndet från parabeln $y = x^2+1$ till linjen $y=0$ 1. Då måste $d(A,B) \geq 1$. Vi visar nu, att $d(A,B)=1$:

Motantagande: Antag, att $d(A,B) = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Nu gäller $d((0, \underset{A}{\wedge} 1+\frac{\varepsilon}{4}), (0, \underset{B}{\wedge} -\frac{\varepsilon}{4})) = |1+\frac{\varepsilon}{4} - (-\frac{\varepsilon}{4})| = 1+\frac{\varepsilon}{2} < 1+\varepsilon$, vilket motsäger $d(A,B) = 1+\varepsilon$. Alltså måste $d(A,B) = 1$.

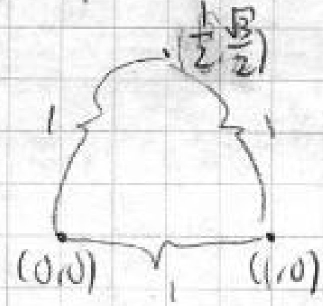
b) Eftersom $A \cap B = \emptyset$, gäller det för alla $a \in A$, $b \in B$ att $d(a,b) = 1$. Alltså är $d(A,B) = 1$.

8. Uppg. 2.10: Antag, att X är ett metriskt rum, $A \subset X$ en begränsad mängd och att $d(A) = r > 0$. Visa, att A innehålls i någon kula $\bar{B}(a,r)$. Ge ett exempel på en mängd $A \subset \mathbb{R}^2$ som inte innehålls i någon cirkelskiva $\bar{B}(a, \frac{r}{2})$.

Bevis. Eftersom $d(A) = r > 0$, så gäller $A \neq \emptyset$. Låt nu $a \in A$. Vi undersöker kulan $\bar{B}(a,r)$. Låt $b \in A$ vara given. Då gäller $d(b,a) \leq r$,

8. eftersom $d(A)=r$. Alltså måste $b\in\bar{B}(a,r)$, dvs. $A\subset\bar{B}(a,r)$. $\square$

Vi undersöker mängden $A=\{(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\}$. Då gäller $d((0,0),(1,0))=1$, $d((0,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}))=\sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}$
$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$ och $d((1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}))=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}$
$=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$. Alltså är $d(A)=1$.



Vi ser på en kula $\bar{B}(a,\frac{1}{2})$, $a\in\mathbb{R}^2$. För att $A\subset\bar{B}(a,\frac{1}{2})$, måste naturligtvis $(0,0)\in\bar{B}(a,\frac{1}{2})$ och $(1,0)\in\bar{B}(a,\frac{1}{2})$. Detta uppfylls i fall $a=(\frac{1}{2},0)$, för då är
$d((0,0),(\frac{1}{2},0))=\sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(0-0)^2}=\frac{1}{2}$, och
$d((1,0),(\frac{1}{2},0))=\sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+(0-0)^2}=\frac{1}{2}$. Då gäller dock
$d((\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(\frac{1}{2},0))=\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs.
$(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})\notin\bar{B}(a,\frac{1}{2})$. Vi borde alltså hitta en annan mittpunkt för kulan $\bar{B}(a,\frac{1}{2})$.

8. Låt $a=(a_1,a_2)$.

1°: Antag att $a_1 > \frac{1}{2}$. Då gäller

$d((a_1,a_2),(0,0)) = \sqrt{(a_1-0)^2+(a_2-0)^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2} > \sqrt{(\frac{1}{2})^2+a_2^2}$

$\geq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, dvs. $(0,0) \notin \bar{B}(a,\frac{1}{2})$.

2°: Antag att $a_1 < \frac{1}{2}$. Då gäller

$d((a_1,a_2),(1,0)) = \sqrt{(a_1-1)^2+(a_2-0)^2} > \sqrt{(\frac{1}{2}-1)^2+a_2^2} \geq \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

dvs. $(1,0) \notin \bar{B}(a,\frac{1}{2})$. Alltså måste $a_1 = \frac{1}{2}$.

Antag nu att $a_2 \neq 0$. Då gäller

$d((\frac{1}{2},a_2),(0,0)) = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+(a_2-0)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+a_2^2} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

dvs. $(0,0) \notin \bar{B}(\frac{1}{2},a_2)$. Alltså måste $a_2 = 0$.

Vi har nu visat att för att det skall gälla

$(0,0) \in \bar{B}(a,\frac{1}{2})$ och $(1,0) \in \bar{B}(a,\frac{1}{2})$ måste $a=(\frac{1}{2},0)$.

Då gäller $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}) \notin \bar{B}(a,\frac{1}{2})$, alltså innehålls

mängden A inte i någon kula $\bar{B}(a,\frac{1}{2})$.

9. Uppg 2.16 a): Antag att (X, d) är ett metriskt rum och att $x_0 \in X$, $a \in X$. Vi definierar funktionen $f_a : X \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = d(x,a) - d(x, x_0)$.
Visa att f_a är begränsad.

Bevis. Låt $x \in X$ vara given. Eftersom d är en metrik, gäller $d(x,a) \leq d(x,x_0) + d(x_0,a)$ (vi utnyttjar triangelolikheten på x, x_0 och a).
Då får vi att $f_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0)$
$\leq d(x,x_0) + d(x_0,a) - d(x,x_0) = d(x_0,a) \in \mathbb{R}$.
Alltså är $f_a(x)$ alltid mindre eller lika med ett reellt tal oberoende på x, dvs. f_a är begränsad. □

10. Ge exempel på en kula $B(a,r)$ i ett metriskt rum för vilken $d(B(a,r)) < 2r$.

Lösn. Låt $X \neq \emptyset$ vara en mängd, och låt d vara $\{0,1\}$-metriken. Låt $x \in X$. Vi bildar kulan $B(x, \frac{1}{2})$.
Om $x' \in B(x, \frac{1}{2})$, måste $d(x,x') < \frac{1}{2} \Rightarrow x = x'$.
Alltså är $B(x,\frac{1}{2}) = \{x\}$, och $d(B(x,\frac{1}{2})) = 0 < 1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$.