Topologi I, våren 2011
Övning 1, vecka 4
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Antag, att X är en mängd, och att $A_j \subset X$ för alla $j \in J$.

Visa, att $\complement \bigcup_{j\in J} A_j = \bigcap_{j\in J} \complement A_j$.

Bevis: $x \in \complement \bigcup_{j\in J} A_j \iff x \notin \bigcup_{j\in J} A_j \iff x \notin A_j$ för alla $j \in J$ $\iff x \in \complement A_j$ för alla $j \in J \iff x \in \bigcap_{j\in J} \complement A_j$. $\square$

2. Antag, att X är en mängd, och att $A_j \subset X$ för alla $j \in J$.

Visa, att $\complement \bigcap_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} \complement A_j$.

Bevis. $x \in \complement \bigcap_{j\in J} A_j \iff x \notin \bigcap_{j\in J} A_j \iff x \notin A_j$ för något $j \in J$ $\iff x \in \complement A_j$ för något $j \in J \iff x \in \bigcup_{j\in J} \complement A_j$. $\square$

3. Sats 0.8: Antag att $f : X \to Y$. Visa följande påståenden:

(1) $f^{-1} \bigcup \{B_j : j \in J\} = \bigcup \{f^{-1} B_j : j \in J\}$

(2) $f^{-1} \bigcap \{B_j : j \in J\} = \bigcap \{f^{-1} B_j : j \in J\}$

(3) $f^{-1} \complement B = \complement f^{-1} B$

Bevis: (1) $x \in f^{-1} \bigcup \{B_j : j \in J\} \iff f(x) \in \bigcup \{B_j : j \in J\}$ $\iff f(x) \in B_j$ för något $j \in J \iff x \in f^{-1} B_j$ för något $j \in J$ $\iff x \in \bigcup \{f^{-1} B_j : j \in J\}$.

3. (2) $x \in f^{-1} \bigcap\{B_j : j \in J\} \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap\{B_j : j \in J\}$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_j$ för alla $j \in J \Leftrightarrow x \in f^{-1}B_j$ för alla $j \in J$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap\{f^{-1}B_j : j \in J\}$

(3) $x \in f^{-1}\complement B \Leftrightarrow f(x) \in \complement B \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in \complement f^{-1}(B)$

4. Sats 0.8: Antag $f : X \to Y$. Visa följande påståenden:

(4) $f\bigcup\{A_j : j \in J\} = \bigcup\{fA_j : j \in J\}$

(5) $f\bigcap\{A_j : j \in J\} \subset \bigcap\{fA_j : j \in J\}$

Bevis. (4) $y \in f\bigcup\{A_j : j \in J\} \Leftrightarrow y \in fA_j$ för något $j \in J$

$\Leftrightarrow y \in \bigcup\{fA_j : j \in J\}$.

(5) $y \in f\bigcap\{A_j : j \in J\} \Rightarrow y \in fA_j$ för alla $j \in J$

$\Leftrightarrow y \in \bigcap\{fA_j : j \in J\}$.

5. Sats 0.8: Antag $f : X \to Y$. Visa följande påståenden:

(6) $f^{-1}fA \supset A$

(7) $ff^{-1}B \subset B$

(8) Om därtill $g : Y \to Z$, så gäller $(g \circ f)A = gfA$ och $(g \circ f)^{-1}C = f^{-1}g^{-1}C$.

5. Bevis:

(6) $x \in A \Rightarrow f(x) \in fA \Leftrightarrow x \in f^{-1}fA$.

(7) Låt $y \in ff^{-1}B$. Då existerar ett $x \in f^{-1}B$, för vilket $f(x) = y$. Eftersom $x \in f^{-1}B$, gäller $y = f(x) \in B$.

(8) Låt $z \in (g \circ f)A$. Då existerar ett $x \in A$ så att $(g \circ f)(x) = z$. Enligt def. är $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, dvs. $z \in gfA$.

Om $z \in gfA$, så hittas ett $x \in A$ så att $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, alltså $z \in (g \circ f)A$.

Låt nu $x \in (g \circ f)^{-1}C$. Då gäller $(g \circ f)(x) \in C$, dvs. $g(f(x)) \in C$. Alltså $f(x) \in g^{-1}C$, och $x \in f^{-1}g^{-1}C$.

Om $x \in f^{-1}g^{-1}C$, så måste $f(x) \in g^{-1}C$, och $g(f(x)) \in C$.

Alltså $(g \circ f)(x) \in C$, dvs. $x \in (g \circ f)^{-1}C$.

6. Sats 0.10: Antag att $f: X \to Y$. Om f är injektiv, så gäller $f^{-1}fA = A$ för varje $A \subset X$. Om f är surjektiv, så gäller $ff^{-1}B = B$ för varje $B \subset Y$.

Bevis. Vi vet från föregående uppgift, att $A \subset f^{-1}fA$, och att $ff^{-1}B \subset B$.

Antag, att f är injektiv. Det räcker att visa att $f^{-1}fA \subset A$. Låt $x \in f^{-1}fA$. Då måste $f(x) \in fA$, alltså existerar ett $x' \in A$ för vilket $f(x') = f(x)$. Eftersom f är injektiv, gäller $x = x' \in A$.

Antag, att f är surjektiv. Det räcker att visa att $B \subset ff^{-1}B$. Låt $y \in B$. Eftersom f är surjektiv, hittas ett $x \in f^{-1}B$ för vilket $f(x) = y$. Därmed gäller $y \in ff^{-1}B$. □

7. Sats 0.13: Om $f: X \to Y$ är bijektiv, så är $f^{-1}: Y \to X$ bijektiv, och $(f^{-1})^{-1} = f$. Om $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ är bijektiva, så är $g \circ f$ bijektiv, och $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Bevis: f^{-1} surj: Låt $x \in X$ vara given. Då gäller $f(x) = y \in Y$, och enligt def. är $f^{-1}(y) = x$, dvs f^{-1} är surjektiv.

7. f^{-1} inj. Låt $y, y' \in Y$ vara sådana, att $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Vi betecknar $x = f^{-1}(y)$ och $x' = f^{-1}(y')$. Då vet vi att $f(x) = y$, och $f(x') = y'$. Eftersom $x = x'$, är $y = y'$, dvs. f^{-1} är injektiv.

$(f^{-1})^{-1} : X \to Y$; $x = f^{-1}(y) \iff y = (f^{-1})^{-1}(x)$.

Vi visar, att $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$ för alla $x \in X$. Eftersom f och $(f^{-1})^{-1}$ har samma definitions- och målmängder, följer då att $f = (f^{-1})^{-1}$.

Låt $x \in X$. Vi betecknar $f(x) = y$. Då gäller $x = f^{-1}(y)$, och därmed $y = (f^{-1})^{-1}(x)$, dvs. $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$.

$g \circ f$ inj: Låt $x, x' \in X$ vara sådana, att $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, dvs. $g(f(x)) = g(f(x'))$. Eftersom g är inj, gäller $f(x) = f(x')$, och eftersom f är inj, gäller $x = x'$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ inj.

$g \circ f$ surj: Låt $z \in Z$. Då existerar ett $y \in Y$ för vilket $g(y) = z$, och ett $x \in X$ för vilket $f(x) = y$. Därmed gäller $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ surj.

$(g \circ f)^{-1} : Z \to X$; $(g \circ f)(x) = z \iff (g \circ f)^{-1}(z) = x$.

Eftersom $(g \circ f)^{-1}$ och $f^{-1} \circ g^{-1}$ har samma definitions-

$\underline{Z}$ och målmängder, så gäller $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ om $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ för alla $z \in Z$.

Låt $z \in Z$. Vi betecknar $(g \circ f)^{-1}(z) = x$. Därmed gäller $(g \circ f)(x) = z$, dvs. $g(f(x)) = z$. Alltså får vi $f(x) = g^{-1}(z)$, och $x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$. Alltså $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$
$\Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$\underline{8}$. Sats 0.14: Antag att $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, $g \circ f = id_X$ och $f \circ g = id_Y$. Då är både f och g bijektiva, och $g = f^{-1}$.

Bevis: Låt $y \in Y$. Då gäller $g(y) \in X$, och därmed $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$, enl antagandet. Alltså är f surjektiv.

Låt $x_1, x_2 \in X$ vara sådana, att $f(x_1) = f(x_2)$. Då gäller $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ enl. ant.

Alltså är f injektiv, dvs. f bijektiv.

Symmetriskt kan man visa att g är bijektiv.

f^{-1} och g har samma definitions- och målmängder.

Vi visar, att $f^{-1}(y) = g(y)$ för alla $y \in Y$:

Låt $y \in Y$. Vi betecknar $f^{-1}(y) = x$. Då gäller $f(x) = y$,

8. och därmed $x = g(f(x)) = g(y)$, dvs. $f^{-1}(y) = g(y)$.

Alltså gäller $f^{-1} = g$.

9. Uppg. 1.1: Visa att den vanliga inre produkten i $\mathbb{R}^n$ uppfyller villkoren (S1)-(S5).

Bevis: Låt $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n), \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n), \bar{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ och $a \in \mathbb{R}$ vara givna.

(S1) $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = y_1 x_1 + \cdots + y_n x_n = \bar{y} \cdot \bar{x}$

(S2) $(a\bar{x}) \cdot \bar{y} = (ax_1, \ldots, ax_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = ax_1 y_1 + \cdots + ax_n y_n$
$= a(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) = a(\bar{x} \cdot \bar{y})$

(S3) $(\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \cdot (z_1, \ldots, z_n)$
$= (x_1 + y_1) z_1 + \cdots + (x_n + y_n) z_n = x_1 z_1 + y_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_n z_n$
$= x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n + y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n = \bar{x} \cdot \bar{z} + \bar{y} \cdot \bar{z}$

(S4) $\bar{x} \cdot \bar{x} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$

(S5) $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}$.