Topologi I, våren 2011
Övning 11, vecka 16
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg. 13.2: Visa, att unionen av två kompakta delmängder är kompakt.

Bevis. Antag, att $A, B \subset X$ är kompakta i X. Låt (x_n) vara en godtycklig följd i $A \cup B$. Nu hittar vi en delföljd (x_{n_a}) vars alla punkter är i A, eller en delföljd (x_{n_b}) vars alla punkter är i B. Vi antar det första; det andra fallet är symmetriskt.
Eftersom A är kompakt har följden (x_{n_a}) en konv. delföljd $(x_{n_{a_k}})$. Denna följd konv. mot en punkt $a \in A \subset A \cup B$, och är en delföljd av (x_n). Därmed hittas en delföljd $(x_{n_{a_k}})$ av (x_n) för vilken $(x_{n_{a_k}}) \to a \in A \cup B$, dvs. $A \cup B$ är kompakt.

2. Uppg 13.4: Antag att X är metriskt och att $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ är en avtagande följd icke-tomma kompakta delmängder av X. Visa att $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ är icke-tom och kompakt.

Bevis. Vi konstruerar följden (x_n), där $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Eftersom $A_n \subset A_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, är (x_n) en följd i A_1. Då har den en konv. delföljd $(x_{n_k}) \to a \in A_1$. Genom att lämna bort första punkten i följden, ser vi att följden $(x_{n_{k_2}})$ är en följd i A_2, dvs $(x_{n_{k_2}}) \to a \in A_2$. Genom att upprepa detta ser vi att $a \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dvs. $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Eftersom A_n är kompakt $\forall n \in \mathbb{N}$ gäller $A_n \Subset X$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dvs $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Subset X$. Eftersom $A_1 \Subset X$, gäller $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Subset A_1$, ty $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \cap A_1$. Därmed är $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kompakt enligt Sats 13.7. $\square$

3. Uppg 13.7: Antag, att $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$ är sluten och begränsad. Visa, att det i A finns en sådan punkt $a = (a_1, a_2)$ att $x_1 \leq a_1$ för alla $x = (x_1, x_2) \in A$.

Bevis. Enligt sats 13.14 är $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, eftersom den är sluten och begränsad. Vi definierar funktionen $f = pr_{1|A} : A \to \mathbb{R}$, $f(a_1, a_2) = a_1$. f är kontinuerlig, eftersom den är en begränsning av en kont. funktion (pr_1). Eftersom A är kompakt och f kont., uppnår f sitt största (och minsta) värde i A. Vi hittar alltså ett $a = (a_1, a_2) \in A$ så att $f(x) \leq f(a)$ $\forall x \in A$, dvs. $x_1 \leq a_1$ $\forall x = (x_1, x_2) \in A$. □

4. Uppg 14.1: Antag att X är ett sammanh. metr. rum, D en mängd, $f: X \to D$, och att varje $x \in X$ har en omg. i vilken f är konstant. Visa att f är konstant

Bevis. Vi gör ett motant: f är inte konstant. Då hittas det punkter $x_1, x_2 \in X$ så att $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vi betecknar $d_1 = f(x_1)$ och $d_2 = f(x_2)$. Nu hittas enl. ant. omgivningar

4. $x_1 \in U_1$ och $x_2 \in U_2$ för vilka $f(U_1)=\{d_1\}$ och $f(U_2)=\{d_2\}$. Därmed är $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Vi hittar även för alla andra $x \in X$ omgivningar $x \in U_x$ så att $f(U_x)=\{f(x)\}$. Nu gäller för varje $x \in X$ att $f(x) \neq d_1$ eller $f(x) \neq d_2$, dvs. att $U_x \cap U_1 = \emptyset$ eller $U_x \cap U_2 = \emptyset$. Vi definierar mängderna $A = U_1 \cup (\cup\{U_x \mid f(x) \neq d_2\})$ och $B = U_2 \cup (\cup\{U_x \mid f(x) = d_2\})$. Då är $A \cap B = \emptyset$, $A \circledcirc X$, $B \circledcirc X$ och $X = A \cup B$. Dessutom eftersom $x_1 \in U_1$ och $x_2 \in U_2$, är $A \neq \emptyset \neq B$. Därmed är X inte sammanhängande MS. Alltså måste f vara konstant. $\square$

5. Uppg. 14.3: Antag att $A_1, A_2, \ldots$ är en följd sammanhängande delmängder i ett metr. rum X. Visa, att om $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$, så är $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sammanhängande.

Bevis. Vi visar först med induktion att $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ är sammanhängande för alla $n \in \mathbb{N}$.

5. 1° Grundfall $n=1$: A_1 är sammanhängande enl. ant.

2° Antag att påståendet gäller för något $n=k$ (ind. ant.)

3° Vi visar att påst. gäller för $n=k+1$:

Eftersom $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, är $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} \neq \emptyset$.

Enl. ind. ant är $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sammanhängande, och enl. ant. är A_{n+1} sammanhängande. De har en gemensam punkt, och därför är $A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}$ sammanhängande enligt sats 14.12.

Vi betecknar $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Då är B_n sammanhängande $\forall n \in \mathbb{N}$ enligt ovanstående bevis. Tydligt gäller nu $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dessutom eftersom $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, gäller $A_1 \neq \emptyset$, dvs. det finns en punkt $x \in A_1$ för vilken $x \in B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Därmed är $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ sammanhängande enligt sats 14.12, alltså är $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sammanhängande. □

6. Uppg 14.7: Antag att X är ett sammanhängande metr. rum, och att $A, B \subset X$ är icke-tomma. Visa att det finns en punkt $x \in X$ så att $d(x, A) = d(x, B)$.

Bevis. Vi def. funktionen $f: X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x, A) - d(x, B)$

f är kont. enl. 4.6 och 5.2.

Antag att $x_1 \in A$. Då är $f(x_1) = d(x_1, A) - d(x_1, B)$

$= 0 - d(x_1, B) \leq 0$. Ifall $d(x_1, B) = 0$, är påst. bevisat.

Antag alltså att $d(x_1, B) > 0$, dvs. $f(x_1) < 0$.

Antag näst att $x_2 \in B$. Då är $f(x_2) = d(x_2, A) - d(x_2, B)$

$= d(x_2, A) - 0 \geq 0$. Ifall $d(x_2, A) = 0$, är saken klar.

Antag alltså att $d(x_2, A) > 0$, dvs. $f(x_2) > 0$.

Vi vet alltså att f uppnår värden $f(x_1) < 0$ och $f(x_2) > 0$.

Eftersom X är sammanhängade och f är kontinuerlig, ger sats 14.19 att f uppnår alla värden i intervallet $[f(x_1), f(x_2)]$. Alltså hittas ett $x \in X$ för vilket $f(x) = 0$, dvs. $d(x, A) = d(x, B)$. $\square$