Topologi I, våren 2011
Övning 10, vecka 15
Förslag till lösningar
Sebastian Björkqvist

1. Uppg 11.1: Sats 11.12: Antag att (x_n) och (y_n) är följder i X, och att $x_n \to a$ och $y_n \to b$. Då gäller $d(x_n, y_n) \to d(a,b)$.

Bevis. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då hittas $n_1 \in \mathbb{N}$ och $n_2 \in \mathbb{N}$ så att $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$ och $d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$.
Låt $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Då gäller $\forall n \geq n_0$
$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a,b) + d(b, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + d(a,b) + \frac{\varepsilon}{2}$
$= d(a,b) + \varepsilon$. Det gäller även att
$d(a,b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} + d(x_n, y_n) + \frac{\varepsilon}{2}$
$= d(x_n, y_n) + \varepsilon$. Eftersom ε valdes godtyckligt, gäller det att $d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} d(a,b)$. □

2. Uppg. 11.6: Ant. att $a \in X$ och att (x_n) är en sådan följd i X att varje delföljd har en delföljd som konv. mot a. Visa att $x_n \to a$.

Bevis. Vi gör en antites: $x_n \not\to a$. Vi hittar alltså en omg. U till a för vilken $x_n \notin U$ för oändligt många

2. $n \in \mathbb{N}$. Vi betecknar $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$.

Eftersom A är oändlig, är (x_{n_a}) en delföljd till (x_n), där $n_a \in A$. Då måste (x_{n_a}) enl. ant. ha en delföljd $(x_{n_{a_k}})$ som konv. mot a. Ändå, eftersom $n_{a_k} \in A$ $\forall k \in \mathbb{N}$, så gäller $x_{n_{a_k}} \notin U$. Alltså gäller för oändligt många index att $x_{n_{a_k}} \notin U \Rightarrow x_{n_{a_k}} \not\to a$ MS.

Dvs. $x_n \to a$. $\square$

3. Uppg 12.1: Sats 12.2: Antag att (x_n) är en följd i X.

Beteckna $A_n = \{x_j : j \geq n\}$ då $n \in \mathbb{N}$. Då är (x_n) Cauchy om och endast om $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$.

Bevis. "$\Rightarrow$" Antag att (x_n) är Cauchy. Låt $\varepsilon > 0$ vara given. Då hittas ett $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $d(x_n, x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$ då $n \geq n_0$ och $k \geq n_0$. Nu är $d(A_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$, och eftersom $A_n \subset A_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$, är $d(A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_0$. Då gäller

$d(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, ty ε valdes godtyckligt.

"$\Leftarrow$" Antag att $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$. Låt $\varepsilon > 0$ vara givet. Då hittas ett $n_0 \in \mathbb{N}$, så att $d(A_{n_0}) < \varepsilon$.

3. Därmed om $n \geq n_0$ och $k \geq n_0$, gäller

$$d(x_n, x_k) \leq d(A_n) < \varepsilon \Rightarrow (x_n) \text{ är Cauchy.} \square$$

4. Uppg 12.2: Visa, att en Cauchy-följd alltid är begränsad

Bevis. Antag, att (x_n) är Cauchy. Vi vill visa att $d(A) = r \in \mathbb{R}$, där $A = \{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$. Vi definierar $A_n = \{x_j \mid j \geq n\}$. Enl. sats 12.2 (föregående uppg.) gäller $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$. Låt $\varepsilon = 1$. Då hittas ett $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $d(A_{n_0}) < 1$. Vi def $B = \{x_j \mid j \leq n_0\}$. Eftersom B är ändlig, är $d(B) = r_b \in \mathbb{R}$. Dessutom gäller $x_{n_0} \in A_{n_0} \cap B$, dvs. $d(A_{n_0}, B) = 0$. Då gäller enligt sats 2.15 att

$$d(A) = d(A_{n_0} \cup B) \leq d(A_{n_0}) + d(B) + d(A_{n_0}, B)$$

$$< 1 + r_b + 0 \in \mathbb{R}$$. Alltså är A begränsad.

och därmed (x_n) begränsad. $\square$

5. Uppg 12.3: Visa att en fullständig delmängd i ett metriskt rum är sluten.

Bevis. Antag att $A \subset X$ är fullständig, och antag att $x \in \bar{A}$. För varje $n \in \mathbb{N}$ kan vi välja en punkt $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Då gäller $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, dvs. $d(x_n, x) \to 0$ då $n \to \infty$. Då gäller enligt sats 11.3 att följden $x_n \to x$. Därmed är (x_n) Cauchy (som en följd i X), men eftersom $x_n \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, är (x_n) en Cauchy-följd i A. Därmed måste dess konvergenspunkt $x \in \bar{A}$ höra till A, ty A är fullständig. Alltså gäller $\bar{A} \subset A$, dvs. A är sluten. □

6. Uppg 12.7: a) Ant. att X är ett fullst. metr. rum, och att $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ är en avtagande följd icke-tomma, slutna delmängder i X med diametrar $d(A_n)$ som konv. mot noll. Visa att $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ är en enpunktsmängd.
b) Ge exempel på mängder $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i planet som är slutna och icke-tomma, men snittet är tomt. Varför kan vi inte använda a)-fallet här.

Bevis a) Vi väljer punkter $x_n \in A_n$ för varje $n \in \mathbb{N}$. Då är (x_n) en följd i X. Låt $\varepsilon > 0$ vara given. Eftersom $d(A_n) \to 0$ då $n \to \infty$, hittas ett $n_0 \in \mathbb{N}$ så att $d(A_{n_0}) < \varepsilon$. Därmed är $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ då $n \geq n_0$ och $k \geq n_0$, dvs. (x_n) är Cauchy. Då hittas en punkt $x \in X$ så att $(x_n) \to x$, ty X är fullständigt. Eftersom $x_n \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, gäller $x_n \in A_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Eftersom A_1 är sluten, är A_1 fullst. (12.6), dvs. $x \in A_1$. Vi definierar följden (x_{n_0}), där n_0 går från k uppåt. Då gäller $x_{n_0} \in A_k$ $\forall n_0$, dvs. $x \in A_k$.

6. Detta gäller för alla $k \in \mathbb{N}$, dvs. $x \in A_k \ \forall k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Antag att $y \in X, y \neq x$. Nu gäller för något $n_0 \in \mathbb{N}$ att $d(A_{n_0}) < d(x,y)$, dvs. $y \notin A_{n_0}$, alltså $y \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Därmed är $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$.

b) Vi def $A_n = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [n, \infty[\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Nu gäller $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

Låt $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Oberoende vilket $n_0 \in \mathbb{N}$ vi väljer så är $d(A_n) > r \ \forall n \geq n_0$, dvs. $d(A_n) \not\to r$, alltså $d(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$. Vi kan alltså ej använda a)-fallet.

Vi ser även att $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$: I fall vi hade en punkt $(x,0) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, måste $(x,0) \in A_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dvs. $x > n \ \forall n \in \mathbb{N}$, vilket är en motsägelse.

Alltså är $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. $\square$