9.4. Riskin hallinnasta sijoitussidonnaisessa vakuutuksessa

Tarkastellaan keskineliöpoikkeaman minimoimiseen perustuvia sijoitusstrategioita.

Olkoon markkinoiden riskitön korko $r = 0$. Sijoittaja joutuu suorittamaan hetkellä T erään suorituksen X. Ajatellaan, että X riippuu erään osakkeen kehityksestä. Olkoon tämän arvo hetkellä k $S(k)$. Tavoitteena on sijoittaa bondiin ja osakkeeseen sopivasti siten, että syntyvien kustannusten heilahtelu olisi kohtuullista. Päätökset perustetaan kertyneeseen informaatioon. Tätä kuvataan sigma-algebrajonolla $\{\mathcal{F}_k \mid k = 0, 1, \dots, T\}$. Oletetaan, että

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, T-1.$$

Oletetaan nytkin, että $S(k)$ on $\mathcal{F}_k$-mitallinen, mutta $\mathcal{F}_k$ voi sisältää muutakin tietoa kuin osakkeen hintakehityksen. Hetkellä k sijoittajan hallussa on salkku

$$\left(\Theta_1(k+1), \Theta_2(k+1)\right), \quad k = 0, 1, \dots, T,$$

missä $\Theta_i(k+1)$ on $\mathcal{F}_k$-mitallinen ($\Theta_1(k+1)$ on bondien ja $\Theta_2(k+1)$ osakkeiden lukumäärä). Tästä syntyy strategia, jota ei seuraavassa oleteta omavaraiseksi. Sovitaan merkinnöistä, että

$$\Theta_1(T+1) = X, \quad \Theta_2(T+1) = 0.$$

Tämän jälkeen X maksetaan.

9.4.1. Yhden periodin strategia

Olkoon aluksi $T = 1$. Varallisuus $V(k)$ hetkellä k on

$$V(0) = \Theta_1(1) + \Theta_2(1)\, S(0),$$

$$V(1) = \Theta_1(2) + \Theta_2(2)\, S(1) \quad (= X).$$

Kumulatiivinen kustannus $C(k)$ hetkeen k mennessä on

$$C(0) = V(0) = \Theta_1(1) + \Theta_2(1)\, S(0),$$

$$\begin{aligned} C(1) &= C(0) + \Theta_1(2) + \Theta_2(2) S(1) - \big(\Theta_1(1) + \Theta_2(1) S(1)\big) \\ &= X - \Theta_2(1)\big(S(1) - S(0)\big). \end{aligned}$$

Salkun $(\Theta_1(1), \Theta_2(1))$ valintakriteerinä pyritään minimoimaan ensimmäisen periodin kustannuksen keskineliöpoikkeama

$$\mathbb{E}\big((C(1) - C(0))^2\big) = \mathbb{E}\big((X - \Theta_1(1) - \Theta_2(1) S(1))^2\big).$$

Optimaalinen salkku $(\Theta_1^*(1), \Theta_2^*(1))$ on tunnetusti

$$\Theta_1^*(1) = \mathbb{E}(X) - \Theta_2^*(1)\, \mathbb{E}(S_2(1)),$$

$$\Theta_2^*(1) = \frac{\mathrm{Cov}(X, S(1))}{\mathrm{Var}\, S(1)}.$$

Jatkon kannalta on mukavampi kirjoittaa minimoitava keskineliöpoikkeama muotoon

$$\mathbb{E}\left(\left(V(1) - V(0) - \theta_2(1)\left(S(1) - S(0)\right)\right)^2\right).$$

Optimaaliset $V(0)$ ja $\theta_2(1)$ ovat

$$V^*(0) = \mathbb{E}(X) - \theta_2^*(1)\,\mathbb{E}\left(S(1) - S(0)\right),$$

$$\theta_2^*(1) = \frac{\mathrm{Cov}\left(X, S(1) - S(0)\right)}{\mathrm{Var}\left(S(1) - S(0)\right)}.$$

Edellä saatu $\theta_1^*(1)$ saadaan yhtälöstä

$$\theta_1^*(1) = V(0) - \theta_2^*(1)\,S(0).$$

9.4.2. Monen periodin strategia

Olkoon nyt $T \geq 2$. Yhden periodin mallin mukaisesti varallisuus hetkellä k on

$$V(k) = \Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1)\, S(k),$$

$$V(T) = \Theta_1(T+1) + \Theta_2(T+1)\, S(T) = X$$

ja kumulatiivinen kustannus

$$C(k) = C(k-1) + \Theta_1(k+1) + \Theta_2(k+1)\, S(k) - (\Theta_1(k) + \Theta_2(k)\, S(k)).$$

Esimerkiksi induktiolla nähdään, että

$$C(k) = V(k) - \sum_{j=1}^{k} \Theta_2(j)(S(j) - S(j-1)),$$

$$C(T) = X - \sum_{j=1}^{T} \Theta_2(j)(S(j) - S(j-1)).$$

Hetkellä $T-1$ sijoittaja toimii yhden periodin mallin mukaisesti: hankitaan salkku, jolle

$$\mathbb{E}\left((C(T) - C(T-1))^2 \mid \mathcal{F}_{T-1} \right)$$

minimoituu. Kyseessä on siis hetkellä $T-1$ tehtävä päätös, joka perustuu informaatioon $\mathcal{F}_{T-1}$. Yhtäpitävästi, pyritään minimoimaan

$$\mathbb{E}\left((V(T) - V(T-1) - \Theta_2(T)(S(T) - S(T-1)))^2 \mid \mathcal{F}_{T-1} \right),$$

missä $V(T-1)$ ja $\Theta_2(T)$ ovat $\mathcal{F}_{T-1}$-mitallisia.

Ratkaisu on

$$V^*(T-1) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \Theta_2^*(T)\,\mathbb{E}(S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1}),$$

$$\Theta_2^*(T) = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1})}{\mathrm{Var}(S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1})}.$$

Bondien määrä salkussa on

$$\Theta_1^*(T) = V^*(T-1) - \Theta_2^*\, S(T-1)$$

$$= \mathbb{E}(X - \Theta_2^*(T)(S(T)-S(T-1)) \mid \mathcal{F}_{T-1}) - \Theta_2^*\, S(T-1).$$

Hetkellä $T-2$ hankitaan salkku, jolle

$$\mathbb{E}((C(T-1) - C(T-2))^2 \mid \mathcal{F}_{T-2})$$

minimoituu. Tässä otetaan huomioon se, että hetkellä $T-1$ salkku tullaan valitsemaan edellä esitetyn mukaisesti. On siis minimoitava suuretta

$$\mathbb{E}((V^*(T-1) - V(T-2) - \Theta_2(T-1)(S(T-1)-S(T-2)))^2 \mid \mathcal{F}_{T-2}).$$

Optimaaliset $V(T-2)$ ja $\Theta_2(T-1)$ ovat

$$V^*(T-2) = \mathbb{E}(V^*(T-1) - \Theta_2^*(T-1)(S(T-1)-S(T-2)) \mid \mathcal{F}_{T-2})$$

$$= \mathbb{E}\Big(X - \sum_{j=T-1}^{T} \Theta_2^*(j)(S(j)-S(j-1)) \mid \mathcal{F}_{T-2}\Big),$$

$$\Theta_2^*(T-1) = \frac{\mathrm{Cov}(X - \Theta_2^*(T)(S(T)-S(T-1)),\ S(T-1)-S(T-2) \mid \mathcal{F}_{T-2})}{\mathrm{Var}(S(T-1)-S(T-2) \mid \mathcal{F}_{T-2})},$$

$$\Theta_1^*(T-1) = \mathbb{E}\Big(X - \sum_{j=T-1}^{T} \Theta_2^*(j)(S(j)-S(j-1)) \mid \mathcal{F}_{T-2}\Big)$$

$$- \Theta_2^*(T-1)\, S(T-2).$$

Induktiivisesti saadaan

$$V^*(k) = \mathbb{E}\left(\underline{X} - \sum_{j=k+1}^{T} \theta_2^*(j)\left(S(j) - S(j-1)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_k \right)$$

$$\theta_2^*(k+1) = \frac{\operatorname{Cov}\left(\underline{X} - \sum_{j=k+2}^{T} \theta_2^*(j)(S(j) - S(j-1)),\, S(k+1) - S(k) \,\middle|\, \mathcal{F}_k \right)}{\operatorname{Var}\left(S(k+1) - S(k) \,\middle|\, \mathcal{F}_k \right)}$$

$$\theta_1^*(k+1) = \mathbb{E}\left(\underline{X} - \sum_{j=k+1}^{T} \theta_2^*(j)\left(S(j) - S(j-1)\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_k \right)$$

$$- \theta_2^*(k+1)\, S(k).$$

9.4.3. Sovellus sijoitussidonnaiseen vakuutukseen

Oletetaan, että yhtiöllä on hetkellä 0 $N = N(0)$ elämänvaravakuutusta. Vakuutetut ovat kaikki x-ikäisiä ja jäljelläolevat elinajat toisistaan ja finanssimarkkinoista riippumattomia. Korvauksena kukin vakuutettu saa hetkellä T osakkeen arvoa vastaavan määrän $S(T)$, mikäli on tällöin elossa.

Olkoon $N(k)$ hetkellä k elossa olevien vakuutettujen lukumäärä. Korvattava määrä on

$$X = N(T)\, S(T).$$

Merkitään

$$_t p_x = \mathbb{P}(x\text{-ikäinen elää vähintään } t \text{ vuotta}).$$

Seuraavassa $\mathcal{F}_k$ sisältää informaation osakkeen kehityksestä aikaisemmin sekä elossa olevien vakuutettujen lukumäärästä. Ilmeisesti

$$\mathbb{E}\big(X(S(T)-S(T-1)) \mid \mathcal{F}_{T-1}\big)$$

$$= {}_1p_{x+T-1} N(T-1)\, \mathbb{E}\big(S(T)(S(T)-S(T-1)) \mid \mathcal{F}_{T-1}\big),$$

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{T-1})\, \mathbb{E}(S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1})$$

$$= {}_1p_{x+T-1} N(T-1)\, \mathbb{E}(S(T) \mid \mathcal{F}_{T-1})\, \mathbb{E}(S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1}),$$

$$\mathrm{Cov}(X, S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1})$$

$$= {}_1p_{x+T-1} N(T-1)\, \mathrm{Cov}\big(S(T), (S(T)-S(T-1)) \mid \mathcal{F}_{T-1}\big)$$

$$= {}_1p_{x+T-1} N(T-1)\, \mathrm{Var}(S(T)-S(T-1) \mid \mathcal{F}_{T-1}),$$

$$\Theta_2^*(T) = {}_1p_{x+T-1}\, N(T-1),$$

$$\Theta_1^*(T) = 0.$$

Samaan tapaan nähdään, että

$$\Theta_2^*(k) = {}_{T-k+1}p_{x+k-1}\, N(k-1),$$

$$\Theta_1^*(k) = 0,$$

$k = 1,\dots,T$. Strategiassa siis pidetään aina odotusarvotasolla korrekti määrä osakkeita.

Menetelmä soveltuu myös tilanteeseen, jossa korvaus on

$f(S(T))$, f mitallinen funktio.

Ratkaisu ei ole yhtä yksinkertainen kuin edellä yleisesti.

Lähteitä:

Møller, T. (2000) Quadratic hedging approaches and indifference pricing in insurance. Ph.D. thesis, University of Copenhagen.

Föllmer, H., Schweizer, M. (1990) Hedging by sequential regression: An introduction to mathematics of option trading. Astin Bulletin 18, 147–160.