Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 10, 4.5.2011

1. Sijoittajalla on hetkellä nolla käytettävissään pääoma $U_0 > 0$. Tämä sijoitetaan vuodeksi markkinoille, joilla sijoituskohteina ovat arvopaperit $1, \ldots, N$. Arvopaperin n hinta hetkellä nolla on $S_n(0)$ ja arvo hetkellä yksi satunnaismuuttuja $S_n(1)$. Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla $i > 0$. Toisin sanoen $S_1(0) = 1/(1+i)$ ja $S_1(1) \equiv 1$. Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Sijoitus tehdään hetkellä nolla. Olkoon Capital Asset Pricing -mallin mukainen odotustuottoa r vastaava optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä $w_n^*(r)U_0$, $n = 1, \ldots, N$, $r > i$.

Hetkellä yksi sijoitussalkku realisoidaan ja samassa yhteydessä luovutetaan aiempien sopimusten nojalla k_n kappaletta arvopaperia n sopijaosapuolille, $n = 1, \ldots, N$ (arvopaperit hankitaan tarvittaessa markkinoilta). Operaatioiden jälkeen sijoittajalla on hallussaan eräs varallisuus U_1 hetkellä yksi. Sijoittaja ottaa salkun valinnassa lähtökohdaksi asetelman, jossa varallisuus U_0 tuottaa varallisuuden U_1 tarkasteluvuotena. Salkku valitaan siten, että odotustuottoaste on r ja tuottoasteen varianssi on minimaalinen. Merkitään

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} k_n \frac{S_n(0)}{U_0}.$$

Muotoile salkun valinta matemaattiseksi optimointitehtäväksi.

2. (jatkoa) Oletetaan, että $\rho \in (0,1)$ ja että $r > (1-\rho)i - \rho$. Osoita, että optimaalinen arvopaperiin n sijoitettava määrä on $((1-\rho)z_n^* + y_n)\, U_0$, $n = 1, \ldots, N$, missä

$$z_n^* = w_n^* \left(\frac{r+\rho}{1-\rho} \right) \qquad \text{ja} \qquad y_n = k_n S_n(0)/U_0$$

3. (jatkoa tehtävään 1) Oletetaan, että $\rho \in (0,1)$ ja että $r = (1-\rho)i - \rho$. Osoita, että minimaalinen tuottoasteen varianssi on nolla.

4. Markkinoilla on nollakuponkibondi vuosikorolla $i \geq 0$ (arvopaperi 1) ja lisäksi riskilliset arvopaperit $2, \ldots, N$. Arvopaperin n lukumäärä on L_n, $n = 1, \ldots, N$. Olkoon markkinoiden hinnoittelija ϕ muotoa $\phi = a + bA(1)$, missä a ja b ovat vakioita ja $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1. Olkoon R_n arvopaperin n tuottoaste ja R^* riskillisten arvopapereiden kokonaistutottoaste. Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_n) = i + \frac{\mathrm{Cov}\,(R_n, R^*)}{\mathrm{Var}\,(R^*)}(\mathbb{E}(R^*) - i), \quad n = 1, \ldots, N. \tag{$*$}$$

5. Olkoot markkinat muuten kuten edellisessä tehtävässä, mutta hinnoittelija olkoon muotoa $\phi = g(A(1))$, missä g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio. Oletetaan lisäksi, että riskillisten arvopapereiden tuottoasteiden yhteisjakauma on multinormaalinen (jolloin tunnetusti parilla (R_n, R^*) on kaksiulotteinen normaalijakauma kaikilla n). Osoita, että tulos $(*)$ pätee. Tehtävässä oletetaan tunnetuksi ns. Steinin lemma: jos (X, Y) noudattaa kaksiulotteista normaalijakaumaa ja g on kaikkialla derivoituva tasaisesti rajoitettu funktio, niin

$$\mathrm{Cov}\,(X, g(Y)) = \mathrm{Cov}\,(X, Y)\mathbb{E}(g'(Y)).$$