Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 7, 6.4.2011

1. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot $u_1, \ldots, u_K$ kaikkialla aidosti kasvavia ja derivaatta u_1' kaikkialla aidosti vähenevä. Oletetaan, että kaikilla $k = 2, \ldots, K$,

$$u_k(z) = c_k u_1(a_k z + b_k), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

missä $a_k > 0, c_k > 0$ ja $b_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Olkoon $a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 1$ ja

$$a = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{a_k} \quad \text{ja} \quad b = \sum_{k=1}^{K} \frac{b_k}{a_k}.$$

Oletetaan lisäksi, että $c_k = 1/a_k, \forall k$. Tarkastellaan vaatimuksia

$$u_k'(S(1)\bar{\theta}^k) = hf, \quad \forall k,$$

missä $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on sallittu allokointi, h positiivinen vakio ja f positiivinen satunnaismuuttuja. Osoita, että f on välttämättä muotoa

$$f = h^{-1} u_1' \left(\frac{A(1) + b}{a} \right),$$

missä $A(1)$ on markkinoiden kokonaisarvo hetkellä 1.

2. (jatkoa) Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.

3. (jatkoa) Luovutaan oletuksista $c_k = 1/a_k$. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.

4. (jatkoa) Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot muotoa

$$u_k(z) = \mu_k^{-1}(1 - e^{-\mu_k z}), \ z \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, K,$$

missä $\mu_1, \ldots, \mu_K$ ovat positiivisia vakioita. Osoita, että markkinoilla on ainakin yksi Pareto-optimaalinen tila.

5. Sallittua allokointia $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ sanotaan Pareto-optimaaliseksi varianssin suhteen, ellei ole sellaista sallittua allokointia $(\theta^1, \ldots, \theta^K)$, että

$$\mathrm{Var}\,(S(1)\theta^k) \leq \mathrm{Var}\,(S(1)\bar{\theta}^k)$$

kaikilla $k = 1, \ldots, K$ siten, että erisuuruus on aito vähintään yhdellä toimijalla. Osoita, että $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen edellä esitetyssä mielessä, jos on olemassa sellaiset positiiviset vakiot $h_1, \ldots, h_K$ ja satunnaismuuttuja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, että $S(1)\bar{\theta}^k = h_k f$ kaikilla $k = 1, \ldots, K$.