Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 6, 30.3.2011

1. Olkoot arvopaperimarkkinat kuten kohdassa 5.2 ja $T = 2$. Oletetaan, että $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ ja että $\mathbb{P}(\omega) > 0$ kaikilla $\omega \in \Omega$. Oletetaan, että markkinat ovat arbitraasivapaat.
Osoita, että markkinat ovat täydelliset, jos ja vain jos kaikki yhden periodin markkinat $M_0, M_1, \ldots, M_r$ ovat täydellisiä.

2. Kolmen periodin markkinoilla on kolme arvopaperia. Olkoon arvopaperin n hinta hetkellä k $S_n(k)$. Oletetaan, että $S_1(k) = (1 + \mathcal{I}_1) \cdots (1 + \mathcal{I}_k)$ (tyhjä tulo tulkitaan ykköseksi). Arvopaperi 2 on kahden ja arvopaperi 3 kolmen vuoden nollakuponkibondi ts. $S_2(2) \equiv 1$ ja $S_3(3) \equiv 1$. Koron $\mathcal{I}_k$ mahdolliset arvot ovat $\delta_k i_k, \delta_k^2 i_k, \ldots, \delta_k^k i_k$, missä $\delta_k > 1$ ja $i_k > 0$ ovat vakioita. Lisäksi $\mathcal{I}_{k+1} = \delta_{k+1}^j i_{k+1}$ tai $\delta_{k+1}^{j+1} i_{k+1}$, jos $\mathcal{I}_k = \delta_k^j i_k$. (kyseessä on ns. Black-Derman-Toy korkomalli).
Valitaan $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$, missä tilat ω_j vastaavat korkojen $\mathcal{I}_2$ ja $\mathcal{I}_3$ mahdollisia arvopareja

$$\{\mathcal{I}_2 = \delta_2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3 i_3\}, \{\mathcal{I}_2 = \delta_2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^2 i_3\}, \{\mathcal{I}_2 = \delta_2^2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^2 i_3\}, \{\mathcal{I}_2 = \delta_2^2 i_2, \mathcal{I}_3 = \delta_3^3 i_3\}.$$

Olkoon edelleen

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \phi\}, \quad \mathcal{F}_1 = \sigma(\mathcal{I}_2) \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_3 = \sigma(\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3).$$

Oletetaan, että markkinoita kontrolloiva riskineutraali todennäköisyysmitta Q on symmetrinen ts. $Q(\omega_j) = 1/4, \forall j$. Määrää arvopapereiden hinnat $S_n(k), k = 0, 1, 2$, kun $n = 2, 3$.

3. (jatkoa) Olkoon korkomalli kuten edellä ja parametrit $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ annettu. Pyritään kalibroimaan parametrit i_1, i_2 ja i_3 nojautuen markkinoilta saatavissa oleviin nollakuponkibondien todellisiin hintoihin. Olkoot nämä p_1, p_2 ja p_3, missä p_n on n vuoden nollakuponkibondin markkinahinta hetkellä nolla. Oletetaan, että $1 > p_1 > p_2 > p_3$. Osoita, että parametrit i_1, i_2 ja i_3 voidaan määrätä siten, että tehtävän 2 malli antaa todellisia markkinoita vastaavat hinnat kyseisille bondeille.

4. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot $u_1, \ldots, u_K$. Olkoot $\alpha_1, \ldots, \alpha_K$ positiivisia vakioita ja $\beta_1, \ldots, \beta_K$ mielivaltaisia reaalilukuja. Määritellään utiliteettifunktiot v_k ehdoista

$$v_k(z) = \alpha_k u_k(z) + \beta_k, \quad z \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, K.$$

Oletetaan, että $(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^K)$ on Pareto-optimaalinen allokointi, kun utiliteettifunktiot ovat $u_1, \ldots, u_K$. Osoita, että sama pätee, kun utiliteettifunktiot ovat $v_1, \ldots, v_K$.

5. Olkoot toimijoiden utiliteettifunktiot u_k muotoa

$$u_k(z) = \alpha_k z + \beta_k, \quad z \in \mathbb{R}, \ k = 1, \ldots, K,$$

missä $\alpha_k > 0$ ja $\beta_k \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Osoita, että kaikki clearing-ehdon täyttävät allokoinnit ovat Pareto-optimaalisia.