

Sijoitustoiminnan matematiikan laskuharjoitus 5, 23.3.2011

1. Tarkastellaan kahden periodin markkinoita, jonka arvopaperit ovat nollakuponki-bondi (arvopaperi 1) ja osake (arvopaperi 2). Olkoot arvot hetkellä k $S_1(k)$ ja $S_2(k)$ vastaavasti, $k = 0, 1, 2$. Bondin vuosikorko on nolla molempina vuosina. Osakkeen hinta hetkellä nolla on 2, hetkellä yksi $2(1 + \xi_1)$ ja hetkellä kaksi $2(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)$, missä ξ_1 ja ξ_2 ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Lisäksi

$$\mathbb{P}(\xi_1 = -1/2) = \mathbb{P}(\xi_1 = 0) = \mathbb{P}(\xi_1 = 1/2) = 1/3 \text{ ja } \mathbb{P}(\xi_2 = -1/2) = 1/3, \mathbb{P}(\xi_2 = 1/2) = 2/3.$$

Määrää kaikki markkinoiden riskineutraalit todennäköisyysmitat sopivassa kuusitilaisessa todennäköisyyskentässä.

2. (jatkoa tehtävään 1) Lisätään markkinoille arvopaperi, jonka omistaja saa hetkellä kaksi määrän $\max(S_2(1) - S_2(0), 0)$. Määrää arvopaperin arbitraasivapaat hinnat. Pystytäänkö uusi arvopaperi toistamaan arvopapereiden 1 ja 2 avulla.

3. (jatkoa tehtävään 1) Lisätään markkinoille arvopaperi 3, jonka omistaja saa hetkellä kaksi määrän $\max(S_2(2) - S_2(1), 0)$. Määrää arvopaperin arbitraasivapaat hinnat ja mahdolliset arvot hetkellä yksi.

4. (jatkoa tehtävään 3) Konstruoi strategia, joka toistaa arvopaperin 3 arvopapereiden 1 ja 2 avulla. Määrää tämän avulla arvopaperin arbitraasivapaa hinta.

5. Olkoot arvopaperimarkkinat kuten kohdassa 5.2. Oletetaan, että markkinoiden hinnoittelua kontrolloi riskineutraali todennäköisyysmitta Q . Lisätään markkinoille arvopaperi $N + 1$, jonka arvo hetkellä T on eräs \mathcal{F} -mitallinen satunnaismuuttuja $S_{N+1}(T)$, jolle $\mathbb{E}_Q(|S_{N+1}(T)|) < \infty$. Määritellään kyseisen arvopaperin arvo hetkellä k ehdosta

$$S_{N+1}(k) = \mathbb{E}_Q \left(\frac{S_{N+1}(T)}{(1 + \mathcal{I}_{k+1}) \cdots (1 + \mathcal{I}_T)} \mid \mathcal{F}_k \right), \quad k = 0, 1, \dots, T - 1.$$

Osoita, että syntyneet markkinat ovat arbitraasivapaat.