Painotetut epäyhtälöt
7. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Olkoon $v \in L^1_{\mathrm{loc}}$ sellainen funktio, että $Mv < \infty$ melkein kaikkialla. Osoita, että $(Mv)^\delta \in A_1$ kaikilla $\delta \in (0,1)$ ja $[(Mv)^\delta]_{A_1} \leq C_d/(1-\delta)$.

Ratkaisu. Olkoon $Q \subset \mathbb{R}^d$ mielivaltainen kuutio. Koska pätee $(a+b)^\delta \leq a^\delta + b^\delta$ kaikilla $a, b \geq 0$ ja $Mv = M(\chi_{2Q}v + \chi_{(2Q)^c}v) \leq M(\chi_{2Q}v) + M(\chi_{(2Q)^c}v)$, niin voidaan arvioida

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q (Mv)^\delta \leq \frac{1}{|Q|}\int_Q M(\chi_{2Q}v)^\delta + \frac{1}{|Q|}\int_Q M(\chi_{(2Q)^c}v)^\delta =: I + II.$$

Jos $x \in Q$, niin

$$M(\chi_{(2Q)^c}v)(x) \leq \sup_{\substack{R\colon \ell(R)\geq \ell(Q)/2,\\ Q\cap R\neq\emptyset}} \frac{1}{|R|}\int_R |v| \lesssim_d \sup_{\substack{R\colon \ell(R)\geq \ell(Q)/2,\\ Q\cap R\neq\emptyset}} \frac{1}{|10R|}\int_{10R} |v| \leq \inf_Q Mv.$$

Täten erityisesti pätee $II \lesssim_d \inf_Q (Mv)^\delta$.

Olkoon $A^\delta = \inf_Q (Mv)^\delta/(1-\delta)$. Käyttämällä tietoa $\|M\|_{L^1\to L^{1,\infty}} \lesssim_d 1$ saadaan, että

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\delta}{|Q|}\int_0^\infty t^{\delta-1}|Q \cap \{M(\chi_{2Q}v) > t\}|\,dt \\
&\lesssim_d A^\delta + \|\chi_{2Q}v\|_1 \frac{\delta}{|Q|}\int_A^\infty t^{\delta-2}\,dt \\
&\lesssim_d A^\delta + \inf_Q Mv \cdot \delta\frac{A^{\delta-1}}{1-\delta} \\
&= A^\delta(1 + \delta(1-\delta)^{1/\delta-1}) \lesssim A^\delta = \frac{\inf_Q (Mv)^\delta}{1-\delta}.
\end{aligned}$$

Väite seuraa nyt välittömästi painoluokan A_1 määritelmästä.