Painotetut epäyhtälöt
6. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Olkoot $w_1, w_2 \in A_1$. Osoita, että $w := w_1 w_2^{1-p} \in A_p$ ja $[w]_{A_p} \le [w_1]_{A_1}[w_2]_{A_1}^{p-1}$.

Ratkaisu. On arvioitava suuretta

$$[w]_{A_p} = \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1 w_2^{1-p}\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1^{1-p'} w_2\Big)^{p-1}.$$

Painoluokan A_1 määritelmän nojalla pätee

$$\|w_i^{-1}\|_{L^\infty(Q)} \le [w_i]_{A_1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_i\Big)^{-1},$$

ja siis melkein kaikilla $x \in Q$ pätee

$$w_1^{1-p'}(x) \le [w_1]_{A_1}^{p'-1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1\Big)^{1-p'} \qquad \text{ja} \qquad w_2^{1-p}(x) \le [w_2]_{A_1}^{p-1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2\Big)^{1-p}.$$

Näin ollen saadaan, että

$$\begin{aligned}[w]_{A_p} &\le \sup_Q [w_2]_{A_1}^{p-1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2\Big)^{1-p}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1\Big)[w_1]_{A_1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_1\Big)^{-1}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w_2\Big)^{p-1} \\ &= [w_1]_{A_1}[w_2]_{A_1}^{p-1}.\end{aligned}$$

2. Olkoon $w \in A_p$ jollain $p \in (1,\infty)$. Osoita, että $w \in A_{p-\epsilon}$, kun $\epsilon = c_d(p-1)/[\sigma]_{A_\infty}$. Esitä lisäksi arvio suureelle $[w]_{A_{p-\epsilon}}$.

Ratkaisu. Olkoon $c_d = 1/(1+2^{d+3})$. Olkoon lisäksi painon $w \in A_p$ duaalipaino $\sigma = w^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$. Pannaan merkille, että

$$p-\epsilon-1 = (p-1)\Big(1-\frac{c_d}{[\sigma]_{A_\infty}}\Big) = (p-1)\frac{1}{1+\frac{c_d}{[\sigma]_{A_\infty}-c_d}},$$

missä

$$\frac{c_d}{[\sigma]_{A_\infty}-c_d} \le \frac{2^{-d-3}}{[\sigma]_{A_\infty}}.$$

Näin ollen käänteisen Hölderin epäyhtälön nojalla pätee

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-\epsilon-1)}\Big)^{p-\epsilon-1} &= \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma^{1+\frac{c_d}{[\sigma]_{A_\infty}-c_d}}\Big)^{\frac{1}{1+\frac{c_d}{[\sigma]_{A_\infty}-c_d}}\cdot(p-1)} \\ &\le \Big(2\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\Big)^{p-1}.\end{aligned}$$

Tästä päätellään, että

$$
\begin{aligned}
[w]_{A_{p-\epsilon}} &= \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{-1/(p-\epsilon-1)}\Big)^{p-\epsilon-1} \\
&\le 2^{p-1}\sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q \sigma\Big)^{p-1} = 2^{p-1}[w]_{A_p}.
\end{aligned}
$$

3. Olkoon $b \in \mathrm{BMO}$ reaaliarvoinen. Osoita, että $e^{sb} \in A_2$, kun $|s| < c_d/\|b\|_{\mathrm{BMO}}$.

Ratkaisu. Arvioidaan seuraavasti

$$
\begin{aligned}
[e^{sb}]_{A_2} &= \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{sb}\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-sb}\Big) \\
&= \sup_Q \Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{s(b-\langle b\rangle_Q)}\Big)\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{-s(b-\langle b\rangle_Q)}\Big) \\
&\le \sup_Q \frac{1}{|Q|}\int_Q e^{|s||b-\langle b\rangle_Q|}.
\end{aligned}
$$

Johnin–Nirenbergin epäyhtälön tunnetun seurauksen nojalla pätee, että jos $g \in \mathrm{BMO}$ ja $\gamma < 1/(2^d e)$, niin

$$
\frac{1}{|Q|}\int_Q e^{\gamma|g-\langle g\rangle_Q|/\|g\|_{\mathrm{BMO}}} \le 1 + \frac{2^d e^2\gamma}{1-2^d e\gamma}.
$$

Näin ollen valitsemalla $c_d = 1/(2^d e)$ saadaan, että

$$
[e^{sb}]_{A_2} \le 1 + \frac{2^d e^2|s|\|b\|_{\mathrm{BMO}}}{1-2^d e|s|\|b\|_{\mathrm{BMO}}}.
$$

4. Olkoot $b \in \mathrm{BMO}$ reaaliarvoinen ja $w \in A_2$. Osoita, että $e^{sb}w \in A_2$, kun $|s|$ on riittävän pieni, ja esitä arvio suureelle $[e^{sb}w]_{A_2}$.

Ratkaisu. Asetetaan

$$
\epsilon = \frac{2^{-d-3}}{\max([w]_{A_\infty}, [w^{-1}]_{A_\infty})}.
$$

Tällöin käänteisen Hölderin epäyhtälön nojalla

$$
\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q w^{1+\epsilon}\Big)^{1/(1+\epsilon)}\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q (w^{-1})^{1+\epsilon}\Big)^{1/(1+\epsilon)} \le 4[w]_{A_2}.
$$

Täten käyttämällä Hölderiä eksponenteilla $1+\epsilon$ ja $1+\epsilon^{-1}$ nähdään, että

$$
[e^{sb}w]_{A_2} \le 4[e^{(1+\epsilon^{-1})sb}]_{A_2}^{1/(1+\epsilon^{-1})}[w]_{A_2}.
$$

Edellisen tehtävän nojalla kaikilla s, joilla pätee

$$|s| < (1+\epsilon^{-1})^{-1} 2^{-d} e^{-1} \|b\|_{\mathrm{BMO}}^{-1} =: s_{\max},$$

on voimassa

$$[e^{(1+\epsilon^{-1})sb}]_{A_2} \leq 1 + \frac{2^d e^2 (1+\epsilon^{-1})|s| \|b\|_{\mathrm{BMO}}}{1 - 2^d e (1+\epsilon^{-1})|s| \|b\|_{\mathrm{BMO}}}.$$

Jos rajoitetaan parametria s hieman lisää olettamalla, että $|s| \leq s_{\max}/2$, niin saadaan esimerkiksi

$$[e^{(1+\epsilon^{-1})sb}]_{A_2}^{1/(1+\epsilon^{-1})} \leq 4^{2^{-4}},$$

ja siis näillä s pätee

$$[e^{sb} w]_{A_2} \leq 5 [w]_{A_2}.$$