Painotetut epäyhtälöt
5. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Osoita, että $(1+|\cdot|)^{-d} \in L^p(\mathbb{R}^d, w)$, kun $w \in A_p$ ja $p \in (1,\infty)$. Päättele myös, että $(1+|\cdot|)^{-d} f \in L^1$, kun $f \in L^p(w)$ jollain $p \in (1,\infty)$. Osoita, että annetuna $\epsilon > 0$ ja $p \in (1,\infty)$ on olemassa $w \in A_p$, jolla $(1+|\cdot|)^{-1+\epsilon} \notin L^p(\mathbb{R}, w)$.

Ratkaisu. Olkoon $p \in (1,\infty)$ ja $w \in A_p$. Olkoon M keskitetty Hardyn–Littlewoodin maksimaalifunktio. Tällöin pätee

$$M(\chi_{B(0,1)})(x) = \sup_{r>0} \frac{|B(0,1) \cap B(x,r)|}{|B(0,1)| r^d} \geq \frac{|B(0,1)|}{|B(0,1)|(1+|x|)^d} = (1+|x|)^{-d},$$

ja näin ollen

$$\|(1+|\cdot|)^{-d}\|_{L^p(w)} \leq \|M(\chi_{B(0,1)})\|_{L^p(w)} \lesssim_d [w]_{A_p}^{1/(p-1)} w(B(0,1))^{1/p} < \infty.$$

Olkoon sitten $f \in L^p(w)$. Tällöin

$$\|(1+|\cdot|)^{-d} f\|_{L^1} = \|(1+|\cdot|)^{-d} w^{-1/p} f w^{1/p}\|_{L^1} \leq \|(1+|\cdot|)^{-d}\|_{L^{p'}(\sigma)} \|f\|_{L^p(w)} < \infty,$$

missä $\sigma = w^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$.

Voidaan olettaa, että $\epsilon < 1$. Olkoon $\beta \in (-1 + (1-\epsilon)p, p-1)$. Tällöin erityisesti $-1 < \beta < p-1$, ja siis $w(x) = |x|^\beta$ määrittelee A_p-painon reaaliakselilla. Nyt $x \mapsto |x|^{(-1+\epsilon)p+\beta}$ ei integroidu yli joukon $|x| \geq 1$, sillä $(-1+\epsilon)p + \beta > -1$, ja siis $(1+|\cdot|)^{-1+\epsilon} \notin L^p(w)$.

Seuraavissa tehtävissä S on dyadinen neliöfunktio reaaliakselilla:

$$Sf(x) = \Big(\sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} \Big)^{1/2}.$$

2. Totea, että $\|Sf\|_2 = \|f\|_2$, ja osoita Calderónin–Zygmundin hajotelmaa käyttäen, että $S\colon L^1 \to L^{1,\infty}$ rajoitetusti.

Ratkaisu. Kirjoitetaan $f = \sum_{I \in \mathcal{D}} \langle f, h_I \rangle h_I$, jolloin ortogonaalisuuden nojalla

$$\|f\|_2^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f, h_I \rangle|^2 = \|Sf\|_2^2.$$

Olkoon sitten annettu $\lambda > 0$. Olkoot $\mathcal{B}$ maksimaaliset $L \in \mathcal{D}$, joilla $|\langle f \rangle_L| > \lambda$, ja $f = g + b = g + \sum_{L \in \mathcal{B}} b_L$ standardi Calderónin–Zygmundin hajotelma. Koska S on L^2-rajoitettu, niin riittää arvioida joukon $\{|Sb| > \lambda\}$ mittaa. Osoitamme, että oikeastaan $\operatorname{spt} Sb \subset \bigcup \mathcal{B}$, ja tämä riittää. Tätä varten kirjoitetaan

$$(Sb(x))^2 = \sum_{I \in \mathcal{D}} \Big| \sum_{L \in \mathcal{B}} \langle b_L, h_I \rangle \Big|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} = \sum_{L \in \mathcal{B}} \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subset L}} |\langle b_L, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|},$$

missä käytettiin tietoa, että $\int b_L = 0$, kokoelma $\mathcal{B}$ on erillinen, ja h_I on vakio välin I lapsilla. Väite seuraa välittömästi.

3. Osoita, että

$$w_\lambda((Sf)^2; Q) \leq C_\lambda \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \Big)^2,$$

kun $Q \in \mathcal{D}$.

Ratkaisu. Jos $x \in Q \in \mathcal{D}$, niin

$$\begin{aligned}(Sf(x))^2 &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subsetneq Q}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} + \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ Q \subset I}} |\langle f, h_I \rangle|^2 \frac{1}{|I|} \\ &= \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subsetneq Q}} |\langle f\chi_Q, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} + c_Q.\end{aligned}$$

Näin ollen pätee

$$(Sf(x))^2 - c_Q = \sum_{\substack{I \in \mathcal{D} \\ I \subsetneq Q}} |\langle f\chi_Q, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} \leq \sum_{I \in \mathcal{D}} |\langle f\chi_Q, h_I \rangle|^2 \frac{\chi_I(x)}{|I|} = (S(f\chi_Q)(x))^2,$$

ja voidaan siis päätellä, että

$$\begin{aligned}w_\lambda((Sf)^2; Q) \leq ((S(f\chi_Q))^2)^*(\lambda|Q|) &\leq \|(S(f\chi_Q))^2\|_{L^{1/2,\infty}} (\lambda|Q|)^{-2} \\ &\leq \|S(f\chi_Q)\|^2_{L^{1,\infty}} (\lambda|Q|)^{-2} \\ &\lesssim_\lambda \|f\chi_Q\|^2_{L^1} |Q|^{-2} = \Big(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f| \Big)^2.\end{aligned}$$

4. Osoita, että $\|Sf\|_{L^3(w)} \leq C[w]_{A_3}^{1/2} \|f\|_{L^3(w)}$, kun $f \in L^3(w)$ ja $w \in A_3$.

Ratkaisu. Huomaa, että $\|Sf\|^2_{L^3(w)} = \|(Sf)^2\|_{L^{3/2}(w)}$, ja että $3' = 3/2$. Täysin vastaavalla tavalla kuin Lauseen 4.1 todistuksessa nähdään, että riittää osoittaa, että

$$\|M^{\#}_{1/4, Q_0}((Sf)^2)\|_{L^{3/2}(w)} + \Big\| \sum_{k,j} \omega_{2^{-3}}((Sf)^2; \widehat{Q}_j^k) \chi_{Q_j^k} \Big\|_{L^{3/2}(w)} \lesssim [w]_{A_3} \|f\|^2_{L^3(w)},$$

missä $Q_0 \in \mathcal{D}$ on mielivaltainen (ja estimaatit eivät riipu ko. välistä), ja (Q_j^k) on Lernerin kaavan antama hajotelma, joka liittyy funktioon $(Sf)^2$ ja väliin Q_0. Edellisen tehtävän nojalla $M^{\#}_{1/4, Q_0}((Sf)^2) \lesssim (Mf)^2$, ja edelleen Buckleyn nojalla

$$\|(Mf)^2\|_{L^{3/2}(w)} = \|Mf\|^2_{L^3(w)} \lesssim [w]_{A_3} \|f\|^2_{L^3(w)}.$$

Edellisen tehtävän nojalla

$$\sum_{k,j} \omega_{2^{-3}}((Sf)^2; \widehat{Q}_j^k)\chi_{Q_j^k} \lesssim \sum_{k,j} \Big(\frac{1}{|\widehat{Q}_j^k|} \int_{\widehat{Q}_j^k} |f| \Big)^2 \cdot \chi_{Q_j^k} =: F.$$

Duaalisuuden nojalla riittää osoittaa, että

$$\int Fhw \lesssim [w]_{A_3} \|f\|_{L^3(w)}^2 \|h\|_{L^3(w)}.$$

Olkoon $\sigma = w^{-1/2}$ painon $w \in A_3$ duaalimitta. Nyt pätee

$$\begin{aligned}
\int Fhw &= \sum_{k,j} \Big(\frac{1}{|\widehat{Q}_j^k|} \int_{\widehat{Q}_j^k} |f| \Big)^2 \cdot \int_{Q_j^k} hw \\
&= \sum_{k,j} \Big(\frac{1}{\sigma(\widehat{Q}_j^k)} \int_{\widehat{Q}_j^k} (|f| w^{1/2})\sigma \Big)^2 \frac{1}{w(Q_j^k)} \int_{Q_j^k} hw \cdot \frac{w(Q_j^k)}{|Q_j^k|} \Big(\frac{\sigma(\widehat{Q}_j^k)}{|\widehat{Q}_j^k|} \Big)^2 |Q_j^k| \\
&\lesssim [w]_{A_3} \int (M_\sigma(fw^{1/2}))^2 M_w(h) \\
&= [w]_{A_3} \int (M_\sigma(fw^{1/2}))^2 \sigma^{2/3} M_w(h) w^{1/3} \\
&\leq [w]_{A_3} \|M_\sigma(fw^{1/2})\|_{L^3(\sigma)}^2 \|M_w(h)\|_{L^3(w)} \\
&\lesssim [w]_{A_3} \|fw^{1/2}\|_{L^3(\sigma)}^2 \|h\|_{L^3(w)} = [w]_{A_3} \|f\|_{L^3(w)}^2 \|h\|_{L^3(w)},
\end{aligned}$$

missä ensimmäisessä estimaatissa käytettiin tietoa, että välit Q_j^k ovat melkein erillisiä so. on olemassa erilliset $E_j^k \subset Q_j^k$ niin, että $|Q_j^k| \leq 2|E_j^k|$. Väite on todistettu.

5. Minkä painotetun arvion saat S:lle avaruudessa $L^p(w)$ ekstrapoloimalla tapausta $p = 3$?

Ratkaisu. Ekstrapoloimalla saadaan estimaatti

$$\|Sf\|_{L^p(w)} \lesssim [w]_{A_p}^{\max\left(\frac{3-1}{p-1}, 1\right)\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(w)} = [w]_{A_p}^{\max\left(\frac{1}{p-1}, \frac{1}{2}\right)} \|f\|_{L^p(w)}.$$