Painotetut epäyhtälöt
4. tehtävien ratkaisut (HM)

1. Olkoon Ш dyadinen siirto parametrein (m, n). Osoita, että

$$\|Шf\|_{\mathrm{BMO}_d} \le (1+n)\|f\|_{L^\infty}, \qquad f \in L^2 \cap L^\infty.$$

Ratkaisu. Jos $x \in Q \in \mathcal{D}$, niin kirjoitetaan

$$Шf(x) = Ш(f\chi_Q)(x) + \sum_{\substack{K\in\mathcal{D}\\ Q\subsetneq K\subset Q^{(n)}}} A_K(f\chi_{Q^c})(x) + c_Q,$$

missä c_Q on vakio. Tällöin käyttämällä dyadisten siirtojen L^2-rajoittuneisuutta ja tietoa $|A_K(f\chi_{Q^c})(x)| \le \langle |f| \rangle_K \le \|f\|_\infty$ saadaan

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |Шf(x) - c_Q| \le \Big(\frac{1}{|Q|}\|Ш(f\chi_Q)\|_{L^2}^2\Big)^{1/2} + n\|f\|_{L^\infty} \le (1+n)\|f\|_{L^\infty}.$$

2. Totea, että avaruuden $L^p(w)$ duaali tavallisen painottamattoman parituksen $\langle f,g\rangle = \int fg$ suhteen on $L^{p'}(w^{1-p'})$. Todista tämän pohjalta, että jos lineaariselle operaattorille T pätee $\|T\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \le \phi([w]_{A_p})$ jollain $p \in (1,\infty)$ ja kaikilla $w \in A_p$, niin myös $\|T^*\|_{L^{p'}(w)\to L^{p'}(w)} \le \phi([w]_{A_{p'}}^{p-1})$ kaikilla $w \in A_{p'}$. Tässä T^* on transpoosi painottamattoman parituksen suhteen.

   Oletetaan sitten, että ehdosta $\|T\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \le \phi([w]_{A_p})$ kaikilla $w \in A_p$ seuraa $\phi(t) \ge ct^\alpha$. Todista, että mikäli pätee $\|T^*\|_{L^{p'}(w)\to L^{p'}(w)} \le \psi([w]_{A_{p'}})$ kaikilla $w \in A_{p'}$, niin $\psi(t) \ge ct^{\alpha(p-1)} = ct^{\alpha/(p'-1)}$.

Ratkaisu. Olkoon $w \in A_p$. Jos $g \in L^{p'}(w^{1-p'})$ on annettu, niin identiteetin $-p'/p = 1-p'$ nojalla kaikilla $f \in L^p(w)$ pätee

$$|\langle f,g\rangle| \le \langle |f|w^{1/p}, |g|w^{-1/p}\rangle \le \|g\|_{L^{p'}(w^{1-p'})}\|f\|_{L^p(w)}.$$

Näin ollen $f \mapsto \langle f,g\rangle$ on jatkuva lineaarinen funktionaali avaruudessa $L^p(w)$.

Olkoon sitten annettu jatkuva lineaarinen funktionaali Λ avaruudessa $L^p(w)$. Asetetaan $\widetilde{\Lambda} f = \Lambda(fw^{-1/p})$ kun $f \in L^p$. Tällöin $\widetilde{\Lambda}$ on jatkuva lineaarinen funktionaali avaruudessa L^p. Täten on olemassa $\tilde{g} \in L^{p'}$ niin, että kaikilla $f \in L^p(w)$ pätee

$$\Lambda f = \widetilde{\Lambda}(fw^{1/p}) = \int fw^{1/p}\tilde{g} =: \int fg,$$

missä $g = w^{1/p}\tilde{g} \in L^{p'}(w^{1-p'})$. On osoitettu, että avaruuden $L^p(w)$ duaali tavallisen painottamattoman parituksen suhteen on $L^{p'}(w^{1-p'})$.

Oletetaan, että $\|T\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq \phi([w]_{A_p})$ jollain $p \in (1,\infty)$ ja kaikilla $w \in A_p$. Olkoon $w \in A_{p'}$. Tällöin $w^{1-p} \in A_p$ ja $[w^{1-p}]_{A_p} = [w]_{A_{p'}}^{p-1}$. Täten edellä todistetun dualiteetin nojalla pätee, että

$$\|T^*\|_{L^{p'}(w)\to L^{p'}(w)} = \|T\|_{L^p(w^{1-p})\to L^p(w^{1-p})} \leq \phi([w^{1-p}]_{A_p}) = \phi([w]_{A_{p'}}^{p-1}).$$

Oletetaan sitten, että ehdosta $\|T\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq \phi([w]_{A_p})$ kaikilla $w \in A_p$ seuraa $\phi(t) \geq ct^\alpha$. Oletetaan lisäksi, että pätee $\|T^*\|_{L^{p'}(w)\to L^{p'}(w)} \leq \psi([w]_{A_{p'}})$ kaikilla $w \in A_{p'}$. Olkoon $w \in A_p$. Nyt edellä todistettu dualiteetti antaa, että

$$\|T\|_{L^p(w)\to L^p(w)} = \|T^*\|_{L^{p'}(w^{1-p'})\to L^{p'}(w^{1-p'})} \leq \psi([w^{1-p'}]_{A_{p'}}) = \psi([w]_{A_p}^{p'-1}) =: \phi([w]_{A_p}),$$

missä $\phi(t) = \psi(t^{p'-1})$. Oletuksen nojalla saadaan sitten, että

$$\psi(t) = \phi(t^{1/(p'-1)}) \geq ct^{\alpha/(p'-1)} = ct^{\alpha(p-1)}.$$

3. Arvioi funktion $f(x) = x^{-\alpha}\chi_{(-1,0)}$ Hilbertin muunnosta välillä $(0,1)$, ja tee tämän pohjalta ala-arvio Hilbertin muunnoksen normille painotetuissa avaruuksissa $L^p(w)$, missä $w(x) = |x|^\beta$. Päättele, että jos $\|H\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq \phi_p([w]_{A_p})$ jollain p ja kaikilla $w \in A_p$, niin $\phi_p(t) \geq c_p t^{1/(p-1)}$. Käyttäen edellisen tehtävän duaalisuutta, päättele vielä, että itse asiassa $\phi_p(t) \geq c_p t^{\max(1,1/(p-1))}$.

Ratkaisu. Pätee $w \in A_p$, jos ja vain jos $-1 < \beta < p-1$, ja $f \in L^p(w)$, jos ja vain jos $\alpha < (1+\beta)/p\,(< 1)$. Jos $x \in (0,1)$, niin pätee

$$|Hf(x)| = \int_{-1}^{0} \frac{|y|^{-\alpha}}{x+|y|}\,dy \geq \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} |y|^{-\alpha}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha}x^{-\alpha}.$$

Täten saadaan, että

$$\|Hf\|_{L^p(w)} \geq \|Hf\|_{L^p((0,1),w)} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha}\|x^{-\alpha}\|_{L^p((0,1),w)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha}\|f\|_{L^p(w)},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa, sillä myös paino on symmetrinen. On osoitettu, että

$$\|H\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{1-\alpha}, \qquad \alpha < (1+\beta)/p.$$

Otetaan $\beta = (p-1)(1-s)$ ja $\alpha = 1-s$, $s \in (0,1]$. Tällöin $1/s \sim_p [w]_{A_p}^{1/(p-1)}$. Nyt siis

$$\|H\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \gtrsim_p [w]_{A_p}^{1/(p-1)},$$

ja näin ollen välttämättä $\phi_p(t) \geq c_p t^{1/(p-1)}$.

Tiedetään siis erityisesti, että ehdosta $\|H\|_{L^{p'}(w)\to L^{p'}(w)} \leq \phi_{p'}([w]_{A_{p'}})$ kaikilla $w \in A_{p'}$ seuraa $\phi_{p'}(t) \geq c_{p'}t^{1/(p'-1)}$. Lisäksi, sillä $H^* = -H$, pätee $\|H^*\|_{L^p(w)\to L^p(w)} = \|H\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq \phi_p([w]_{A_p})$ kaikilla $w \in A_p$. Ollaan siis tehtävän 2 viimeisen väitteen tilanteessa, kun p on korvattu p':lla ja $\alpha = 1/(p'-1)$. Näin ollen $\varphi_p(t) \geq c_p t^{\alpha(p'-1)} = c_p t$.